ESCUELA NACIONAL DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL VALLEJO:

LIBRO DIGITAL DE MATEMÁTICAS II

Autores:

Prof. Elías García Santillán

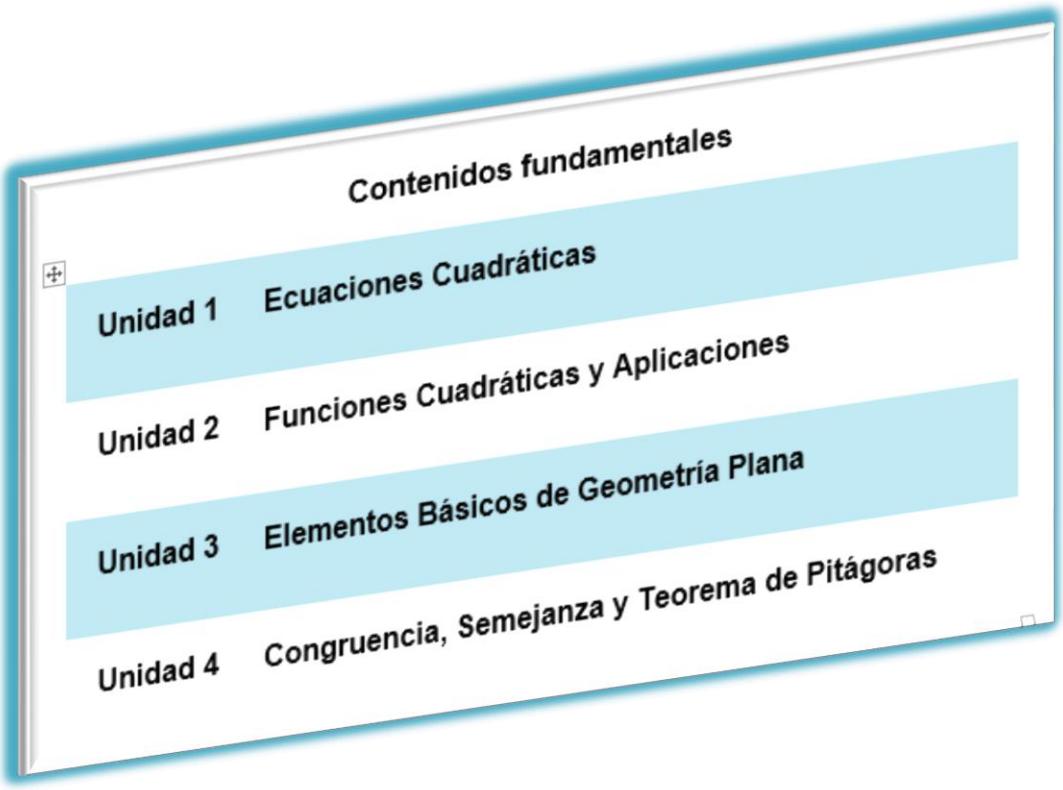
Prof. Armando Hernández Solís

Prof. José Alfonso Loyola y Blanco
(Coordinador)

Prof. Francisco Quezada Campos

Prof. Abraham Leonel Reza Silva

Marzo 2014


Contenidos fundamentales
Unidad 1 Ecuaciones Cuadráticas
Unidad 2 Funciones Cuadráticas y Aplicaciones
Unidad 3 Elementos Básicos de Geometría Plana
Unidad 4 Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras

ÍNDICE

Presentación		6
Unidad I Ecuaciones cuadráticas		
1.1	Introducción	8
1.2	Breve historia de la ecuación cuadrática	8
1.3	Clasificación de la ecuación cuadrática	9
1.4	Método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas	10
1.5	Método de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas	13
1.6	Solución general de la ecuación de segundo grado	19
1.7	Deducción de la fórmula general de la ecuación de segundo grado	20
1.8	Resolviendo ecuaciones cuadráticas con la fórmula general	22
1.9	Resolución de problemas	25
Unidad II Funciones Cuadráticas y Aplicaciones		
2.1	Introducción	31
2.2	Ejemplos simples de funciones	32
2.3	Concepto de función	33
2.4	Función cuadrática	37
2.5	Ejemplos de funciones cuadráticas	38

2.6	Aplicaciones	43
2.7	Recordatorio	47
2.8	Ejercicios propuestos	48
Unidad III Elementos básicos de Geometría Plana		
3.1	Introducción	57
3.2	Un poco de Historia	57
3.3	Elementos básicos de la geometría	65
3.4	Comandos para geometría en Geogebra	74
3.5	Rectas paralelas y perpendiculares	76
3.6	Bisectriz y clasificación de ángulos por su apertura	80
3.7	Tipos de ángulos que se forman entre dos rectas paralelas	84
3.8	Clasificación de triángulos	87
3.9	Suma de los ángulos de un triángulo	90
3.10	Rectas notables de un triángulo	92
3.11	Polígonos	103
3.12	Círculo y circunferencia	108
Unidad IV Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras		
4.1	Definiciones básicas	117

4.2	Principios básicos de los triángulos congruentes	118
4.3	Semejanza de triángulos	122
4.4	Criterios de semejanza de triángulos	122
4.5	Teorema de Tales y su recíproco	123
4.6	Teorema de la altura de un triángulo	124
4.7	El Teorema de Pitágoras	127
	Bibliografía	130

Presentación

Este libro presenta el contenido y el desarrollo del curso de Matemáticas II, asignatura del Plan de estudios de la Escuela Nacional del Colegio de Ciencias y Humanidades, el cual consta de cuatro unidades. Así mismo, el presente trabajo va acompañado del Software "El sueño de Descartes" que contiene animaciones dinámicas e interactivas que permitirán, indudablemente, fortalecer los contenidos temáticos del precitado libro así como contribuir al enriquecimiento de los aprendizajes de los alumnos.

De esta forma, la Unidad I aborda los métodos para resolver una ecuación cuadrática, así como diversos problemas que tienen como modelo fundamental una ecuación de segundo grado.

La Unidad II estudia a la función cuadrática, que es en cierto modo, una generalización del problema que se plantea al proponer una ecuación de segundo grado. Al estudiar la función cuadrática, se tiene implícito el concepto de función, y sus diversas representaciones: la tabular, la algebraica y la gráfica.

Por otra parte, la Unidad III trata de los elementos básicos de la geometría sintética de Euclides, tales como el punto, la recta, el plano, los triángulos y sus rectas notables, paralelas, perpendiculares, la clasificación de los ángulos y la circunferencia.

En la Unidad IV se estudian los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos, con la cual se cierra el panorama global de la geometría euclidiana, la cual ha sido motivo de constante estudio durante varios siglos y de alto significado pragmático (por la diversidad de sus aplicaciones) en la vida del homo sapiens pues esta clase de geometría suministra las herramientas conceptuales, descriptivas,

analíticas y visuales para modelar y estudiar la forma, las figuras y sus propiedades, describiendo así el entorno más cercano del hombre.

☞ Finalmente agradecemos infinita y sinceramente a la **Dirección General de Asuntos del Personal Académico** (**DGAPA**) todo el apoyo logístico, tecnológico y administrativo, por aprobar y apoyar, sin reserva alguna, este Proyecto **Infocab** con número **PB100812**, que originalmente fue propuesto por el **M. en C. Alfonso José Loyola Blanco** (qpd), y que continuamos de manera grupal los autores de la presente obra.

ATTE.

Prof. Elías García Santillán

Prof. Armando Hernández Solís

Prof. Francisco Quezada Campos

Prof. Abraham Leonel Reza Silva

Unidad 1. Ecuaciones Cuadráticas

1.1 Introducción

Una ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado es una ecuación polinomial donde el mayor exponente es igual a dos. Normalmente la expresión se refiere al caso en el que solo aparece una incógnita y que se expresa en la forma canónica siguiente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde $\boldsymbol{a}$ es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y siempre es distinto de cero $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b}$ es el coeficiente lineal o de primer grado y $\boldsymbol{c}$ es el término independiente.

La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos del conocimiento, ya que permite modelar una gran cantidad de relaciones y leyes.

1.2 Breve historia de la ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática y su solución tienen un origen antiguo. Se conocieron algoritmos para resolverla en Babilonia. En Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría (Figura 1.1). La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya en su obra *Liber embadorum*.

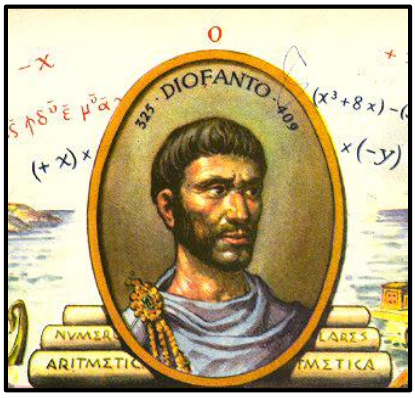


Figura 1.1. Diofanto de Alejandría.

1.3 Clasificación de la ecuación cuadrática

La ecuación cuadrática se clasifica de la siguiente manera:

1. **Completa**: tiene la forma canónica:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde los tres coeficientes $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$ son distintos de cero.

Esta ecuación admite tres posibilidades para las soluciones:

a) Dos números reales y diferentes
b) Dos números reales e iguales (un número real doble) o
c) No tiene solución en el dominio de los números reales

Dependiendo del valor que tome el discriminante, definido por la expresión:

$$\boldsymbol{dis = b^2 - 4ac}$$

es posible determinar cuál de las tres soluciones mencionadas se presenta:

d) Si $\boldsymbol{dis} > 0$ entonces se presenta la solución enunciada en a)
e) Si $\boldsymbol{dis = 0}$ entonces se presenta la solución enunciada en b)
f) Si $\boldsymbol{dis} < 0$ entonces se presenta la solución enunciada en c)

La ecuación cuadrática se puede resolver por:

a) Factorización
b) El método de completar el cuadrado
c) Fórmula general (la cual se deduce más adelante)

2. **Incompleta**: tiene la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$$

donde los valores de $\boldsymbol{a}$ y de $\boldsymbol{c}$ son distintos de cero. Se resuelve despejando $\boldsymbol{x}$ con operaciones inversas y su solución son dos raíces reales que difieren en el signo si los valores de $\boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{c}$ tienen signo contrario y no tiene solución en el dominio de los números reales si $\boldsymbol{a}\ y\ \boldsymbol{c}$ tienen el mismo signo. Una ecuación cuadrática incompleta de la forma:

$$ax^2 = 0$$

con $a \neq 0$ muy rara vez aparece en la práctica y su única solución es $x = 0$.

3. **Incompleta mixta**: tiene la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

donde los valores de a y de b son distintos de cero. Se resuelve factorizando en x y siempre tiene la solución trivial $x_1 = 0$.

1.4 Método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas

Este método consiste en expresar la ecuación cuadrática:

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

en términos del producto de dos binomios lineales en x, es decir:

$$x^2 + bx + c = (x + d)(x + e) \qquad (2)$$

A este proceso se le suele llamar *factorización*.

> ☞**Nota**: En la ecuación (1), suponemos que el coeficiente a del término cuadrático es uno, es decir $a = 1$.

Para encontrar los valores de los parámetros d y e, desarrollemos el lado derecho de la ecuación (2):

$$x^2 + bx + c = x^2 + ex + dx + de$$

$$x^2 + bx + c = x^2 + (e + d)x + de \qquad (3)$$

Igualando los coeficientes del lado izquierdo con los coeficientes del lado derecho de la ecuación (2), tenemos el siguiente par de ecuaciones:

$b = e + d$ (4) y

$c = de$ (5)

Las ecuaciones (4) y (5) nos dicen, entonces, que para poder factorizar la ecuación cuadrática (1), es necesario encontrar dos números cuya suma sea $\boldsymbol{e + d}$ y cuyo producto sea $\boldsymbol{de}$. Generalmente, estos números pueden encontrarse al analizar las posibles combinaciones de los divisores y múltiplos del término independiente $\boldsymbol{c}$ de la ecuación cuadrática.

Una vez encontrados los números $\boldsymbol{e}$ *y* $\boldsymbol{d}$ se iguala a cero la ecuación (2):

$$(\boldsymbol{x + d})(\boldsymbol{x + e}) = \boldsymbol{0} \qquad (6)$$

Dado que cuando el producto de dos factores es igual a cero, ello significa que alguno de los factores involucrados, ya sea $(\boldsymbol{x + d})$ *o* $(\boldsymbol{x + e})$, debe ser igual a cero, es decir:

Si $\boldsymbol{x + d = 0}$ entonces $\boldsymbol{x_1 = -d}$ o
Si $\boldsymbol{x + e = 0}$ entonces $\boldsymbol{x_2 = -e}$.

> ☞**Nota**: Hay que recordar que la operación aritmética resta (-) es un caso particular de la operación aritmética suma (+).

Ejemplo 1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización:

(a) $\boldsymbol{x^2 + 12x + 32 = 0}$ (7)

✔***Solución***

Los divisores y múltiplos del término independiente 32 son 2, **4**, **8,** 16 y 32. Observamos que los números 4 y 8 suman 12 y su producto es igual a 32; por lo tanto la ecuación (7) se puede factorizar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{x^2 + 12x + 32 = (x + 4)(x + 8)}$$

$(x+4)(x+8)=0$

Si $x+4=0$ entonces $x_1=-4$ o

Si $x+8=0$ entonces $x_2=-8$.

Concluimos que las soluciones, también llamadas raíces, de la ecuación (7) son:

$x_1=-4$ y $x_2=-8$

✓Comprobación:

Sustituyendo $x_1=-4$ en la ecuación (7):

$(-4)^2+12(-4)+32=16-48+32=-32+32=0$

Sustituyendo $x_2=-8$ en la ecuación (7):

$(-8)^2+12(-8)+32=64-96+32=-32+32=0$

(b) $t^2-5t+6=0$ (8)

✓*Solución*

Los divisores y múltiplos del término independiente 6 son **2**, **3** y 6. Observamos que los números -2 y -3 suman -5 y su producto es igual a $6=(-2)(-3)$; por lo tanto la ecuación (7) se puede factorizar de la siguiente forma:

$t^2-5t+6=[t+(-2)][t+(-3)]$

$t^2-5t+6=(t-2)(t-3)$

$(t-2)(t-3)=0$

Si $t-2=0$ entonces $t_1=2$ o

Si $t-3=0$ entonces $t_2=3$.

Concluimos que las soluciones de la ecuación (8) son:

$t_1=2$ y $t_2=3$

✓Comprobación:

Sustituyendo $t_1 = 2$ en la ecuación (8):

$(2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = -6 + 6 = 0$

Sustituyendo $t_2 = 3$ en la ecuación (8):

$(3)^2 - 5(3) + 6 = 9 - 15 + 6 = -6 + 6 = 0$

> ☞**Nota**: Cuando en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, el coeficiente del término cuadrático a sea diferente de 0 (es decir $a \neq 0$), emplearemos otros métodos, descritos en las siguientes secciones.

▸ **Ejercicios**. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización y comprobar los resultados obtenidos:

1.	$x^2 + 8x + 7 = 0$	3.	$t^2 = 20t - 100$	5.	$x^2 - 6x + 27 = 0$
2.	$x^2 + 6x = -5$	4.	$r^2 + 42 = -13r$	6.	$-4h - 45 = -h^2$

1.5 Método de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas

Todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver **completando el cuadrado**. Este método tiene como base los siguientes binomios elevados al cuadrado:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2 \quad \text{y} \quad x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Los dos trinomios inmediatos anteriores son ambos trinomios cuadrados perfectos, pues los dos se factorizan como el cuadrado de un binomio. En cada caso, el coeficiente del término cuadrático (x^2) es 1 y si sacamos la mitad del coeficiente del término lineal (x) y lo elevamos al cuadrado, obtendremos el tercer término, es decir:

$$\left[\frac{1}{2}(2a)\right]^2 = a^2$$

$$\left[\frac{1}{2}(-2a)\right]^2 = (-a)^2 = a^2$$

Ejemplo 2. A los binomios siguientes, sumarles un número para formar trinomios cuadrados perfectos:

a. $\boldsymbol{x^2 + 8x}$ b. $\boldsymbol{x^2 - 10x}$ c. $\boldsymbol{x^2 - 13x}$

✓***Solución***

a. Para obtener un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión $\boldsymbol{x^2 + 8x}$, se saca la mitad de 8 para obtener 4; se eleva al cuadrado 4 para obtener 16 y se suma 16 a $x^2 + 8x$, es decir:

$$\boldsymbol{x^2 + 8x + \left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = x^2 + 8x + (4)^2}$$

$$\boldsymbol{= x^2 + 8x + 16}$$

☞ Notar que: $\boldsymbol{x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2}$.

b. Para obtener un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión $\boldsymbol{x^2 - 10x}$, se saca la mitad de -10 para obtener -5; se eleva al cuadrado -3 para obtener 9 y se suma 9 a $x^2 - 10x$, es decir:

$$\boldsymbol{x^2 - 10x + \left[\frac{1}{2}(-10)\right]^2 = x^2 - 10x + (-5)^2}$$

$$\boldsymbol{= x^2 - 10x + 25}$$

☞ Notar que: $\boldsymbol{x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2}$.

c. Para obtener un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión $\boldsymbol{x^2 - 13x}$, se saca la mitad de -13 para obtener $\boldsymbol{-\frac{13}{2}}$; se eleva al cuadrado $\boldsymbol{-\frac{13}{2}}$ para obtener $\boldsymbol{\frac{169}{4}}$ y se suma $\boldsymbol{\frac{169}{4}}$ a $x^2 - 13x$, es decir:

$$\boldsymbol{x^2 - 13x + \left[\frac{1}{2}(-13)\right]^2 = x^2 - 13x + \left(-\frac{13}{2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{= x^2 - 13x + \frac{169}{4}}$$

☞ Notar que: $\boldsymbol{x^2 - 13x + \frac{169}{4} = (x - \frac{13}{2})^2}$.

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ completando el cuadrado, es necesario seguir los siguientes pasos:

1. Comprobar o cerciorarse de que el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ sea 1. Si no es así, se transforma en 1 dividiendo ambos lados de la ecuación entre el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$.
2. De ser necesario, sumar un número a ambos lados de la ecuación para llevar el término constante al lado derecho del signo igual.
3. Completar el cuadrado:
   a. Sacar la mitad al coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ y elevar el resultado al cuadrado.
   b. Sumar ese cuadrado a ambos lados de la ecuación.
4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto y reducir términos semejantes.
5. Resolver la ecuación obtenida, notando que si la constante es mayor que 0, habrán dos soluciones.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $x^2 + 8x + 15 = 0$, completando el cuadrado.

✔***Solución***

Paso 1. En este ejemplo, el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ es 1.

Paso 2. Sumamos -15 a ambos lados para llevar la constante al lado derecho del signo igual:

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$x^2 + 8x = -15$$

Paso 3: El coeficiente de x es 8; la mitad de 8 es 4 y $4^2 = 16$. Por lo tanto, sumamos 16 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + 8x + 16 = -15 + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = 1 \quad (9)$$

Paso 4: Como el lado izquierdo de la ecuación (9) es un trinomio cuadrado perfecto, se puede factorizar para obtener $(x + 4)^2$:

$$x^2 + 8x + 16 = 1$$

$$(x + 4)^2 = 1 \qquad (10)$$

Paso 5: Extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación (10) y despejando x , se obtiene:

$$x + 4 = \pm\sqrt{1}$$

$$x + 4 = \pm 1$$

$$x = -4 \pm 1$$

⇨Considerando el signo positivo: $x = -4 + 1$, la solución 1 es: $x_1 = -3$.

⇨Considerando el signo negativo: $x = -4 - 1$, la solución 2 es: $x_2 = -5$.

☞ **Ejercicio**: Comprueba que las dos soluciones obtenidas satisfacen la ecuación original

Ejemplo 4. Resolver la ecuación $6x^2 + 11x + 30 = 0$, completando el cuadrado.

✓***Solución***

Paso 1. Para transformar en 1 el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$, dividimos entre 6 ambos lados de la ecuación:

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\frac{6}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{6} = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

Paso 2. Sumamos $+1$ a ambos lados para pasar la constante al lado derecho del signo igual:

$$x^2 + \frac{5}{6}x = 1$$

Paso 3: El coeficiente de x es $\frac{5}{6}$; la mitad de $\frac{5}{6}$ es $\frac{5}{12}$ y $(\frac{5}{12})^2 = \frac{25}{144}$. Por lo tanto, sumamos $\frac{25}{144}$ a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{25}{144} = 1 + \frac{25}{144} \qquad (11)$$

Paso 4: Como el lado izquierdo de la ecuación (11) es un trinomio cuadrado perfecto, se puede factorizar para obtener:

$$\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{144 + 25}{144}$$

$$\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144} \qquad (12)$$

Paso 5: Extrayendo la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación (12) y despejando x , se obtiene:

$$x + \frac{5}{12} = \pm\sqrt{\frac{169}{144}}$$

$$x + \frac{5}{12} = \pm\frac{13}{12}$$

$$x = -\frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$$

⇨Considerando el signo positivo:

$$x = -\frac{5}{12} + \frac{13}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 + 13}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{8}{12} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

⇨Considerando el signo positivo:

$$x = -\frac{5}{12} - \frac{13}{12} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 - 13}{12} \quad \rightarrow \quad x = -\frac{18}{12} \quad \rightarrow \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Concluimos entonces que las raíces de la ecuación original son:

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad y \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

☞ **Ejercicio**: Comprueba que las dos soluciones obtenidas satisfacen la ecuación original.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $\boldsymbol{2x^2 + 4x + 1 = 0}$, completando el cuadrado.

✓***Solución***

$2x^2 + 4x + 1 = 0$

$x^2 + 2x + \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$

$x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$

$x^2 + 2x = -\frac{1}{2}$

$x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{2} + 1$

$(x+1)^2 = \frac{1}{2}$

$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

⇨Considerando el signo positivo:

$$x + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad x + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

$$x + 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad x + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicios. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado y comprobar los resultados obtenidos:

1.	$\boldsymbol{x^2 + 2x - 8 = 0}$	3.	$\boldsymbol{9 - 6r = 8r^2}$	5.	$\boldsymbol{p^2 - 6p + 8 = 0}$
2.	$\boldsymbol{6x^2 + x = 2}$	4.	$\boldsymbol{-2 = 2t^2 - 5t}$	6.	$\boldsymbol{11x - 10 = 3x^2}$

1.6 Solución general de la ecuación de segundo grado

La ecuación completa de segundo grado puede tener dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas *raíces* que pueden ser reales o bien podría suceder que no tenga solución en el dominio de los números reales.

En términos generales, la solución a la ecuación cuadrática:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (13)$$

está expresada por la llamada fórmula general, es decir:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (14)$$

donde el símbolo $\pm$ indica que los dos valores:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (15)$$

y

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (16)$$

son soluciones de la ecuación cuadrática.

Es interesante observar que la fórmula general tiene las seis operaciones racionales del álgebra elemental.

Si observamos el discriminante (la expresión dentro de la raíz cuadrada):

$$\boldsymbol{dis = b^2 - 4ac} \quad (17)$$

es posible saber el número y naturaleza gráfica de las soluciones

a) Dos soluciones reales y diferentes si el discriminante es positivo (la parábola cruza dos veces el eje x)

b) Una solución real doble, es decir, de multiciplidad dos si el discriminante es cero (la parábola solo toca en un punto al eje x)

c) No hay solución en el dominio de los números reales si el discriminante es negativo (la parábola no pasa por el eje x)

1.7 Deducción de la fórmula general de la ecuación de segundo grado

Relacionando la ecuación de segundo grado con un polinomio de segundo grado y las raíces del mismo (a su vez raíces de una función cuadrática), podemos resolver la ecuación cuadrática algebraicamente y obtener la fórmula general.

Sea la ecuación:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde $\boldsymbol{a \neq 0}$ para garantizar que sea realmente una ecuación polinomial de segundo grado.

Como es $\boldsymbol{a}$ es distinta de cero, podemos dividir entre $\boldsymbol{a}$ cada término de la ecuación (1):

$$\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0}$$

Restamos el valor del término independiente a ambos miembros de la igualdad:

$$\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}}$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP), o más brevemente, para completar el cuadrado en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\boldsymbol{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$ a ambos miembros de la ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Factorizamos el TCP del lado izquierdo y hacemos la operación indicada del derecho:

$$(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}})^{\boldsymbol{2}}=-\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}+\frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{4a^2}}$$

Hacemos la operación con fracciones en el miembro derecho:

$$(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}})^{\boldsymbol{2}}=\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{4a^2}}$$

Extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros

$$\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}=\pm\sqrt{\frac{\boldsymbol{b^2-4ac}}{\boldsymbol{4a^2}}}$$

Separamos las raíces de la fracción del lado derecho:

$$\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}=\pm\frac{\sqrt{\boldsymbol{b^2-4ac}}}{\sqrt{\boldsymbol{4a^2}}}$$

Simplificamos el radical del denominador del lado derecho:

$$\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}=\pm\frac{\sqrt{\boldsymbol{b^2-4ac}}}{\boldsymbol{2a}}$$

Despejamos la incógnita que buscamos:

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\pm\frac{\sqrt{\boldsymbol{b^2-4ac}}}{\boldsymbol{2a}}$$

Realizamos las fracciones con el mismo denominador del lado derecho y obtenemos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si sustituimos la ecuación: $dis = b^2 - 4ac$ (17)

en la ecuación inmediata anterior, obtenemos la fórmula general en términos del discriminante:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{dis}}{2a}$	(18)	para la parte positiva del radical
y		
$x_2 = \frac{-b - \sqrt{dis}}{2a}$	(19)	para la parte negativa del radical.

☞**Nota**: Antes de aplicar indiscriminadamente la fórmula general en la solución de ecuaciones de segundo grado particulares, se sugiere resolver cada ecuación empleando todos los pasos de la deducción cada vez para tener dominio del método de completar el cuadrado.

1.8 Resolviendo ecuaciones cuadráticas con la fórmula general

Ejemplo 6. Usando la fórmula general, resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, incluyendo la comprobación reciente:

a. $2x^2 - 3x - 5 = 0$. **b.** $x^2 - 14x + 49 = 0$. **c.** $16x^2 + 16x + 3 = 0$.

✓***Solución***

a. $2x^2 - 3x - 5 = 0$. En esta ecuación, $a = 2, b = -3$ *y* $c = -5$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (17) del discriminante:

$$dis = b^2 - 4ac \rightarrow dis = (-3)^2 - 4(2)(-5)$$
$$dis = 9 + 40 \rightarrow dis = 49$$

Dado que $dis = 49 > 0$, hay dos soluciones reales y diferentes.

Sustituyendo el valor del discriminante $\boldsymbol{dis = 49}$ en las ecuaciones (18) y (19), respectivamente:

$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{dis}}{2a}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{dis}}{2a}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{49}}{2(2)}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{49}}{2(2)}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{3 + 7}{4}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{3 - 7}{2(2)}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{10}{4}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-4}{4}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{5}{2}}$	$\boldsymbol{x_2 = -1}$

Comprobación:

Sustituyendo $\boldsymbol{x_1 = \frac{5}{2}}$ en la ecuación original $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 5 = 0}$:

$$\boldsymbol{2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right) - 5 = 2\left(\frac{25}{4}\right) - \frac{15}{2} - 5 = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{10}{2} - 5 = 5 - 5 = 0}$$ ✓

Sustituyendo $\boldsymbol{x_2 = -1}$ en la ecuación original $\boldsymbol{2x^2 - 3x - 5 = 0}$:

$$\boldsymbol{2(-1)^2 - 3(-1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 5 - 5 = 0}$$ ✓

b. $\boldsymbol{x^2 - 14x + 49 = 0}$. En esta ecuación, $\boldsymbol{a = 1, b = -14}$ *y* $\boldsymbol{c = 49}$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (17) del discriminante:

$$\boldsymbol{dis = b^2 - 4ac \rightarrow dis = (-14)^2 - 4(1)(49)}$$

$$\boldsymbol{dis = 196 - 196 \quad \rightarrow \quad dis = 0}$$

Dado que $\boldsymbol{dis = 0}$, hay una solución real doble, es decir, de multiciplidad dos.

Sustituyendo el valor del discriminante $\boldsymbol{dis = 0}$ en las ecuaciones (18) y (19), respectivamente:

$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{dis}}{2a}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{dis}}{2a}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{-(-14) + \sqrt{0}}{2(1)}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{-(-14) - \sqrt{0}}{2(1)}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{14 + 0}{2}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{14 - 0}{2}}$
$\boldsymbol{x_1 = \dfrac{14}{2}}$	$\boldsymbol{x_2 = \dfrac{14}{2}}$
$\boldsymbol{x_1 = 7}$	$\boldsymbol{x_2 = 7}$

☞ **Ejercicio**: Comprueba que la raíz de multiciplidad dos obtenida, satisface la ecuación original.

c. $\boldsymbol{16x^2 + 8x + 9 = 0}$**.** En esta ecuación, $\boldsymbol{a = 16, b = 8}$ *y* $\boldsymbol{c = 9}$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación (17) del discriminante:

$$\boldsymbol{dis = b^2 - 4ac \rightarrow dis = (8)^2 - 4(16)(9)}$$
$$\boldsymbol{dis = 64 - 576 \quad \rightarrow \quad dis = -512}$$

Dado que $\boldsymbol{dis = -512 < 0}$, la ecuación cuadrática $\boldsymbol{16x^2 + 8x + 9 = 0}$ carece de soluciones en el dominio de los números reales.

Ejercicios. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general de la ecuación de segundo grado y comprobar los resultados obtenidos:

1.	$\boldsymbol{16h^2 + 8h - 3 = 0}$	3.	$\boldsymbol{\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x = -1}$	5.	$\boldsymbol{y^2 - 18y = -81}$
2.	$\boldsymbol{4t + 3 = 4t^2}$	4.	$\boldsymbol{8x = -4x^2 - 3}$	6.	$\boldsymbol{-6x = x^2 + 4}$

1.9 Resolución de problemas

Ejercicios resueltos.

Ejercicio 1. La suma de los cuadrados de dos números enteros positivos consecutivos es 85. Determina cuáles son esos números enteros. (*Sugerencia*: Si un número entero es x, el siguiente número entero positivo es $x + 1$.)

✓***Solución***

Sea un x un número entero positivo, entonces su consecutivo es $x + 1$. De acuerdo al enunciado del ejemplo, debe cumplirse que:

$$\boldsymbol{x^2 + (x + 1)^2 = 85}$$
$$\boldsymbol{x^2 + (x^2 + 2x + 1) = 85}$$
$$\boldsymbol{2x^2 + 2x + 1 - 85 = 0}$$
$$\boldsymbol{2x^2 + 2x - 84 = 0}$$
$$\boldsymbol{x^2 + x - 42 = 0}$$
$$\boldsymbol{(x - 6)(x + 7) = 0}$$
$$\boldsymbol{x - 6 = 0} \quad o \quad \boldsymbol{x + 7 = 0}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 6} \quad o \quad \boldsymbol{x_2 = -7}$$

Dado que la raíz $x_2 = -7$ es negativa, la descartamos y tomamos $x_1 = 6$, cuyo sucesor es $x_1 + 1 = 7$. Entonces los números buscados son 6 y 7, pues fácilmente se puede observar que:

$$6^2 + 7^2 = 36 + 49$$
$$6^2 + 7^2 = 85$$

Ejercicio 2. La altura de un triángulo es 5 metros mayor que el triple de su base. Calcula la base del triángulo, si su área es de 6 metros cuadrados.

✓***Solución***

Tomemos como referencia el triángulo de la Figura 1.2.

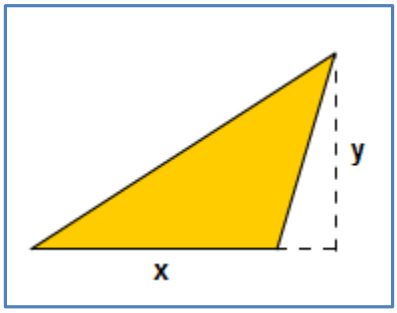


Figura 1.2. Un triángulo.

Sea x la base del triángulo, y su altura y A su área. De acuerdo a los datos del ejercicio, el área del triángulo es:

$$A = \frac{xy}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{xy}{2} = 6 \quad \rightarrow \quad xy = 12 \qquad (20)$$

$$y = 5 + 3x \qquad (21)$$

Sustituyendo (21) en (20):

$$x(5 + 3x) = 12 \quad \rightarrow \quad 5x + 3x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad 3x^2 + 5x - 12 = 0 \qquad (22)$$

Identificando coeficientes de la ecuación (22): $a = 3, b = 5, c = -12$. Entonces:

$$dis = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad dis = (5)^2 - 4(3)(-12)$$
$$dis = 25 + 144 \quad \rightarrow \quad dis = 169$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{dis}}{2a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm 13}{2(3)} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-5 \pm 13}{6}$$

Solución positiva: Solución negativa:

$$x_1 = \frac{-5 + 13}{6} \qquad x_2 = \frac{-5 - 13}{6}$$

$$x_1 = \frac{8}{6} \qquad x_2 = \frac{-18}{6}$$

$$x_1 = \frac{4}{3} \qquad x_2 = -3$$

La base buscada es: $x = \frac{4}{3}\ mts$.

☞ **Ejercicio**: Calcula el valor de la altura del ejemplo inmediato anterior usando tanto el valor de base como el valor del área.

Ejercicio 3. Un rectángulo tiene 4 metros más de longitud que su ancho, y su área es de 96 metros cuadrados. Calcula las dimensiones del rectángulo.

✓***Solución***

Tomemos como referencia el rectángulo de la Figura 1.3:

Figura 1.3. Un rectángulo.

Sea x el largo del rectángulo, y su ancho y A su área. De acuerdo a los datos del ejercicio, el área del rectángulo es:

$$A = xy \quad \rightarrow \quad xy = 96 \quad (23)$$

$$x = 4 + y \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (23):

$$(4+y)y = 96 \;\rightarrow\; 4y + y^2 = 96 \;\rightarrow\; y^2 + 4y - 96 = 0 \qquad (25)$$

Factorizando la ecuación (25), tenemos:

$$(y+12)(y-8) = 0 \;\rightarrow\; y+12 = 0 \;\; o \;\; y-8 = 0$$
$$y_1 = -12 \;\; o \;\; y_2 = 8$$

Por ser la raíz y_1 negativa, la descartamos pues no hay longitudes negativas y sustituimos la raíz $y_2 = 8$ en la ecuación (24) para obtener $x = 4 + 8$, es decir, $x = 12$.

Concluimos que el largo del rectángulo es $x = 12$ y su ancho $y = 8$.

Ejercicio 4. Encuentra dos números enteros consecutivos impares que sean impares y cuyo producto sea 255.

✓***Solución***

Un número impar se representa como $2x + 1$ donde x es cualquier número entero.

Entonces el primer número impar sería $2x + 1$ y su número consecutivo impar sería $2x + 3$.

Si el producto de los dos números es 255, se representaría de la siguiente manera:

$$(2x+1)(2x+3) = 255$$
$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 255$$
$$4x^2 + 8x - 252 = 0$$
$$x^2 + 2x - 63 = 0$$
$$(x+9)(x-7) = 0 \;\rightarrow\; x+9 = 0 \;\; o \;\; x-7 = 0$$
$$x_1 = -9 \;\; o \;\; x_2 = 7$$

Los números impares que estamos buscando son:

$$2(-9) + 1 = -17 \; y \; -15$$
$$2(7) + 1 = 15 \; y \; 17$$

Tenemos entonces los dos pares de números: $(-\mathbf{17}, -\mathbf{15})$ y $(\mathbf{15}, \mathbf{17})$.

Ejercicio 5. Juan compró un cierto número de plumas chinas por $24.00 pesos. Si cada pluma china le hubiera costado $1.00 peso menos, podría haber comprado 4 plumas chinas más. ¿Cuántas plumas compró Juan y a qué precio?

✓***Solución***

Sea $\boldsymbol{x}$ el número de plumas chinas e $\boldsymbol{y}$ el precio de cada pluma china. Entonces:

$$\boldsymbol{xy = 24} \qquad (26)$$

$$\boldsymbol{(x+4)(y-1) = 24} \qquad (27)$$

Desarrollando (27):

$$\boldsymbol{xy - x + 4y - 4 = 24} \qquad (28)$$

Puesto que $\boldsymbol{x \neq 0}$, despejamos $\boldsymbol{y}$ de la ecuación (26):

$$\boldsymbol{y = \frac{24}{x}} \qquad (29)$$

Sustituyendo (26) y (29) en (28):

$$\boldsymbol{24 - x + 4\left(\frac{24}{x}\right) - 4 = 24}$$

$$\boldsymbol{-x + \frac{96}{x} - 4 = 24 - 24}$$

$$\boldsymbol{\frac{-x^2 + 96 - 4x}{x} = 0}$$

$$\boldsymbol{x^2 + 4x - 96 = 0 \quad \rightarrow \quad (x+12)(x-8) = 0}$$

$$\boldsymbol{x + 12 = 0} \ \textit{o} \ \boldsymbol{x - 8 = 0}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -12} \ \textit{o} \ \boldsymbol{x_2 = 8}$$

Por ser $\boldsymbol{x_1}$ una raíz negativa la descartamos y sustituimos la raíz $\boldsymbol{x_2 = 8}$ en la ecuación $\boldsymbol{y = \frac{24}{x}}$, para obtener $\boldsymbol{y = \frac{24}{8}}$, es decir, $\boldsymbol{y = 3}$.

Se concluye entonces que Juan compró 8 plumas chinas a un precio de $3.00 pesos cada una y si hubiera comprado 12 plumas chinas a un precio de $2.00 pesos cada una, hubiera pagado lo mismo, es decir $24.00 pesos.

Ejercicio 6. ¿Cuánto debe medir el diámetro de una pizza para que tenga la misma área que dos pizzas de $12\ cm$ de radio? Toma el valor de $\boldsymbol{\pi = 3.1416}$.

✓***Solución***

La fórmula para calcular el área de una circunferencia es: $\boldsymbol{A = \pi r^2}$.

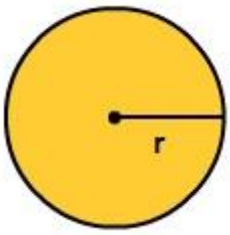


Figura 1.4. Pizza de diámetro d

El área total de las dos pizzas, cada una de radio $\boldsymbol{r = 12\ cm}$, es $\boldsymbol{A_T = 2\pi(12)^2}$, es decir:

$$\boldsymbol{A_T = 904.78} \qquad (30)$$

El área de la pizza de radio r es:

$$\boldsymbol{A_{PIZZA} = \pi r^2} \quad (31)$$

Dado que: $\boldsymbol{A_{PIZZA} = A_T}$ entonces $\boldsymbol{\pi r^2 = 904.78}$

Es decir, $\boldsymbol{r^2 = \frac{904.78}{\pi} \rightarrow r^2 = \frac{904.78}{3.1416} \rightarrow r^2 = 288 \rightarrow r = \sqrt{288} \rightarrow r \approx 16.97}$

El diámetro de la pizza es: $\boldsymbol{d = 2r \rightarrow d \approx 2(16.97) \rightarrow d \approx 33.94\ cm}$.

Unidad 2. Funciones Cuadráticas y Aplicaciones

2.1 Introducción

Las funciones cuadráticas son ampliamente usadas en la ciencia, la tecnología y la economía y nos son de utilidad para modelar situaciones que podemos estudiar y comprender analítica y gráficamente. Por ejemplo, cuando un objeto es lanzado al aire, su movimiento es descrito por una función cuadrática y así podríamos saber en qué momento llega a su máxima altura y cuando regresa al suelo o bien podríamos tener el caso de terreno en forma rectangular cuya área será una función cuadrática y podemos estar interesados en saber cuál es su longitud y ancho de modo que el terreno tenga la máxima área posible.

Las funciones cuadráticas también pueden describir las trayectorias de una pelota de basquetbol al ser encestada [ver Figura 2.1] o de los chorros de agua en una fuente, los rebotes de una pelota, o pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales y faros de los carros; además nos pueden ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios.

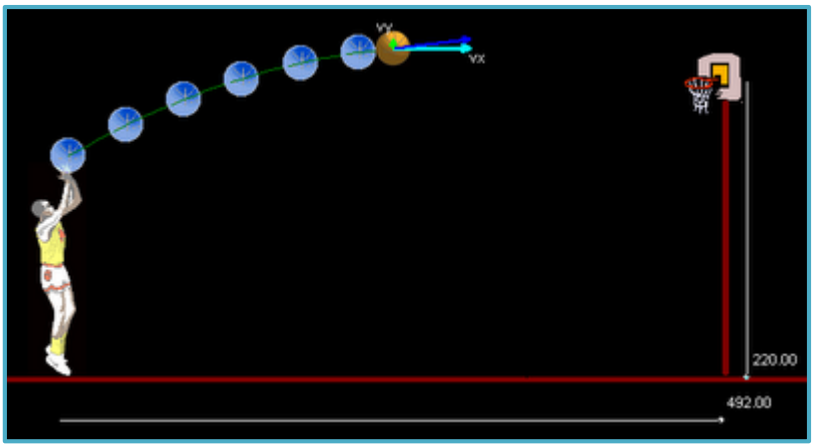


Figura 2.1. Trayectoria de una pelota de basquetbol.

Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los automóviles hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño.

2.2 Ejemplos simples de funciones

Empecemos viendo algunos ejemplos simples de aplicaciones de funciones donde se puede notar que se trata de asociaciones entre cantidades, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos:

1.- El área de una circunferencia está asociada con su radio.

2.- La altura que alcanza una piedra está asociada con la cantidad de tiempo transcurrido desde que la piedra fue lanzada al aire.

3.-El costo de un objeto está asociado con la inversión económica de su producción.

4.- El sueldo que gana una persona que trabaja por su cuenta está asociado al tiempo en horas que dura su jornada.

5.- El peso que gana un cerdo está asociado con la cantidad de alimento que come.

Tenemos así la asociación entre dos conjuntos de números, en el primer ejemplo la asociación es entre un conjunto de números positivos que representan el radio de una circunferencia y otro conjunto que representa el área que tiene esa circunferencia [ver Figura 2.2].

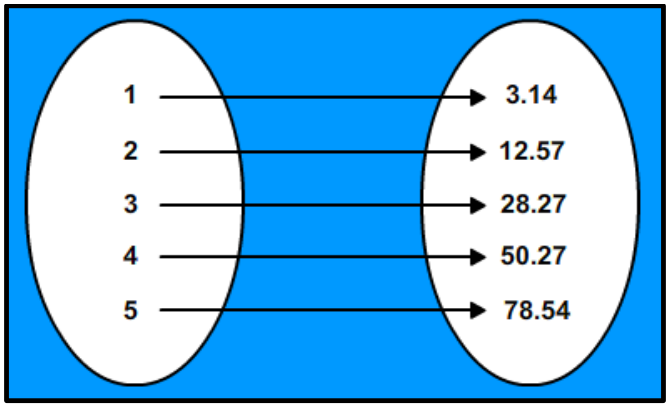


Figura 2.2. Función entre un conjunto de radios y un conjunto de áreas.

Al primer conjunto se le llama dominio y al segundo contradominio, a cada elemento en el dominio “A” le asociamos un elemento en el contradominio “B”. Estamos así interesados en una asociación donde todo el elemento en “A” tenga exactamente un valor fijo en el conjunto “B”, a esta asociación se le conoce como función.

2.3 Concepto de función

Una magnitud o cantidad es **función** de otra si el valor de la primera depende exclusivamente del valor de la segunda. Por ejemplo, como señalábamos en el párrafo anterior, el área *A* de un círculo es función de su radio *r:* el valor es proporcional al cuadrado del radio, $\boldsymbol{A = \pi r^2}$. Del mismo modo, la duración $\boldsymbol{t}$ de un viaje de tren entre dos ciudades separadas por una distancia $\boldsymbol{d}$ de 150 km depende de la velocidad $\boldsymbol{v}$ a la que este se desplace: la duración es inversamente proporcional a la velocidad, $\boldsymbol{t = d/t}$, con $t \neq 0$.A la primera magnitud (el área, la duración, respectivamente) se le denomina variable dependiente, y la cantidad de la que depende (el radio, la velocidad, respectivamente) se le denomina variable independiente.

El concepto general de **función**, **aplicación** o **mapeo** se refiere a una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto (correspondencia matemática). Por ejemplo, cada número entero posee un único cuadrado, que resulta ser un número natural (incluyendo el cero):

…	**-2**	**→**	**4,**	**-1**	**→**	**1,**	**0**	**→**	**0**	
	1	**→**	**1,**	**2**	**→**	**4,**	**3**	**→**	**9**	**…**

Esta asignación constituye una función entre el conjunto de los números enteros **Z** y el conjunto de los números naturales **N**. Aunque las funciones que manipulan número son las más conocidas, no son el único ejemplo: podemos imaginar una función que a cada palabra del español le asigne su letra inicial:

…Estación	→	E,	Museo,	→	M,	Rosa	→	R,	Avión	→	A,…

Esta es una función entre el conjunto de las palabras del español y el conjunto de las letras del alfabeto español.

La manera habitual de denotar una función ***f*** es:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

donde *A* es el **dominio** de la función *f*, su *primer* conjunto o conjunto de partida; y *B* es el **contradominio** (o codominio) de *f*, su *segundo* conjunto o conjunto de llegada.

Cabe señalar que una función puede ser vista como una "caja negra", que transforma los valores u objetos de "entrada" en los valores u objetos de "salida" [ver Figura 2.3]:

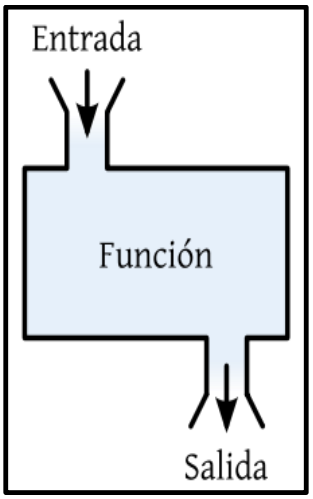


Figura 2.3. Función con entrada y salida.

Por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ se denota la regla o algoritmo para obtener la **imagen** de un cierto objeto arbitrario $\boldsymbol{a}$ del dominio *A*, es decir, el (único) objeto de *B* que le corresponde. En ocasiones esta expresión es suficiente para especificar la función por completo, infiriendo el dominio y contradominio por el contexto.

En el ejemplo anterior, las funciones "cuadrado" e "inicial", llamémosles $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$, se denotarían entonces como:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{N}$$

$$\boldsymbol{k} \rightarrow \boldsymbol{k^2},$$

O sencillamente: $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k^2}$$

Esta última expresión se lee "$\boldsymbol{f}\ de\ \boldsymbol{k}$", siendo así el valor de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{k}$. Así, el elemento $\boldsymbol{k}$ pertenece al conjunto "$\boldsymbol{Z}$" y $\boldsymbol{k^2}$ es un elemento del conjunto "$\boldsymbol{N}$".

Si se conviene en que *V* = {Palabras del español} y *A* = {Alfabeto español}, entonces podemos escribir:

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{Inicial\ de\ p}.$$

Una función puede representarse de diversas formas: mediante el citado algoritmo o ecuaciones para obtener la imagen de cada elemento, mediante una tabla de valores que empareje cada valor de la variable independiente con su imagen (como las mostradas arriba), o como una gráfica que dé una imagen de la función.

☞En resumen, podemos decir que una función es un objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes, y puede presentarse a través de varios aspectos complementarios. Un ejemplo común de función numérica es la relación entre la posición y el tiempo en el movimiento de un objeto.

Supongamos que un móvil que se desplaza con una aceleración de $\boldsymbol{0.66\ m/s^2}$, recorre una distancia $\boldsymbol{d}$ que está en función del tiempo transcurrido $\boldsymbol{t}$. Se dice que $\boldsymbol{d}$ es la variable dependiente de $\boldsymbol{t}$, la variable independiente. Esta relación entre las variables citadas se puede escribir como $\boldsymbol{d = d(t)}$**.** Estas magnitudes, calculadas a priori o medidas en un experimento, pueden consignarse de varias maneras. (Se supone que el cuerpo parte en un instante en el que se conviene que el tiempo es $\boldsymbol{t = 0\ s}$.)

Los valores de las variables pueden registrarse en una tabla, anotando la distancia recorrida $\boldsymbol{d}$ en un cierto instante $\boldsymbol{t}$, para varios instantes distintos [ver Figura 2.4]:

Tiempo *t* (s)	Distancia *d* (m)
0	0
0.5	0.1
1.0	0.3
1.5	0.7
2.0	1.3
2.5	2.0
3.0	2.9

Figura 2.4. La función d = d (t).

La gráfica que se observar en la Figura x es una manera equivalente de presentar la misma información. Cada punto de la curva roja representa una pareja $(\boldsymbol{distancia}, \boldsymbol{tiempo}) = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{t})$, de datos, usando la correspondencia entre puntos y coordenadas del plano cartesiano. También puede utilizarse una regla o fórmula que dicte como se ha de calcular $\boldsymbol{d}$ a partir de $\boldsymbol{t}$. En este caso, la distancia $\boldsymbol{d}$ que recorre un objeto con una aceleración de $\boldsymbol{0.66\ m/s^2}$, está dada por la expresión:

$$\boldsymbol{d = 0.33t^2}$$

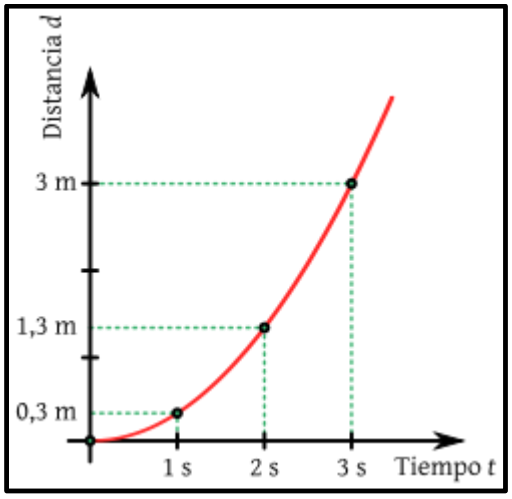


Figura 2.5. Gráfica de la función d = d (t).

De estos modos se refleja la existencia de una dependencia entre las variables independiente y dependiente respectivamente.

2.4 Función cuadrática

Una función cuadrática es aquella que puede escribirse en la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales cualesquiera y $a \neq 0$, ya que si $a = 0$ nunca será una parábola.

Si representamos "todos" los puntos $(x, f(x))$ de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada parábola.

☞Como ejemplo, podemos obtener la representación gráfica de una función cuadrática muy sencilla a saber, $f(x) = x^2$, a partir de una tabulación, es decir, asignando algunos valores a la variable independiente x para obtener los valores correspondientes de la variable dependiente $y = f(x)$, colocarlos ordenadamente en una tabla y graficarlos en un sistema de coordenadas cartesianas:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Tabla 2.1. Parejas de coordenadas.

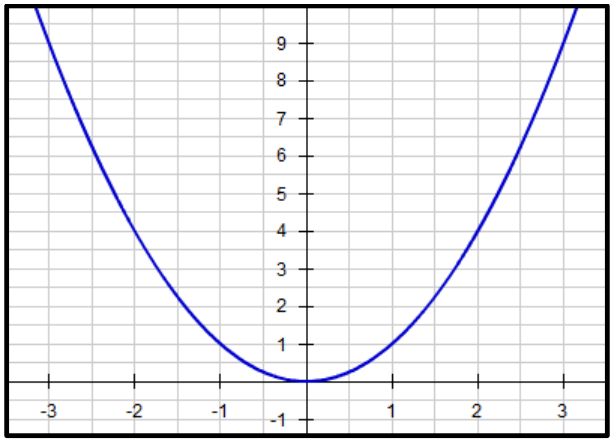


Figura 2.6. Gráfica de $f(x) = x^2$, (cóncava hacia arriba).

☞Como otro ejemplo, podemos obtener la representación gráfica de otra función cuadrática muy sencilla a saber, $f(x) = -x^2$, a partir nuevamente de una

tabulación, es decir, asignando algunos valores a la variable independiente $\boldsymbol{x}$ para obtener los valores correspondientes de la variable dependiente $\boldsymbol{y = f(x)}$, colocarlos de manera ordenada en una tabla y graficarlos en un sistema de coordenadas cartesianas:

$\boldsymbol{x}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\boldsymbol{f(x)}$	-9	-4	-1	0	1	4	9

Tabla 2.2. Parejas de coordenadas.

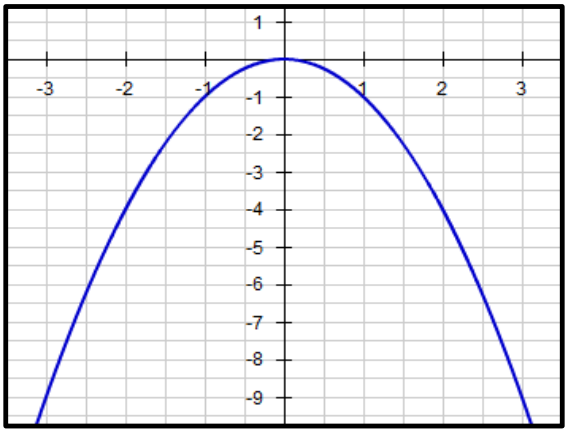


Figura 2.7. Gráfica de $f(x) = -x^2$, (cóncava hacia abajo).

En general una función cuadrática se puede representar del siguiente modo:

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, con $\boldsymbol{a, b}$ y $\boldsymbol{c}$ números reales, donde si $\boldsymbol{a > 0}$, la grafica tiene un punto mínimo y se dice que es cóncava hacia arriba, y si $\boldsymbol{a < 0}$, la gráfica tiene un punto máximo y se dice que es cóncava hacia abajo.

2.5 Ejemplos de funciones cuadráticas

Ejemplo 1: $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - x - 6}$.

Ejemplo 2: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 5}$.

Ejemplo 3: $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 10x}$.

Ejemplo 4: $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 4}$.

✓Como una curiosidad matemática podemos preguntarnos lo siguiente: ¿cómo surgen o cual es el origen de una función cuadrática?

☞Las respuestas pueden ser las siguientes:

a) A partir de productos notables escritos como una función cuadrática.

b) Por la resolución de un problema matemático que involucre funciones cuadráticas.

Ahora vamos a graficar algunos ejemplos de funciones cuadráticas a partir de su tabulación o tabla para algunos valores de la variable independiente $\boldsymbol{x}$:

Ejemplo 5: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x}$.

$\boldsymbol{x}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{f(x)}$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

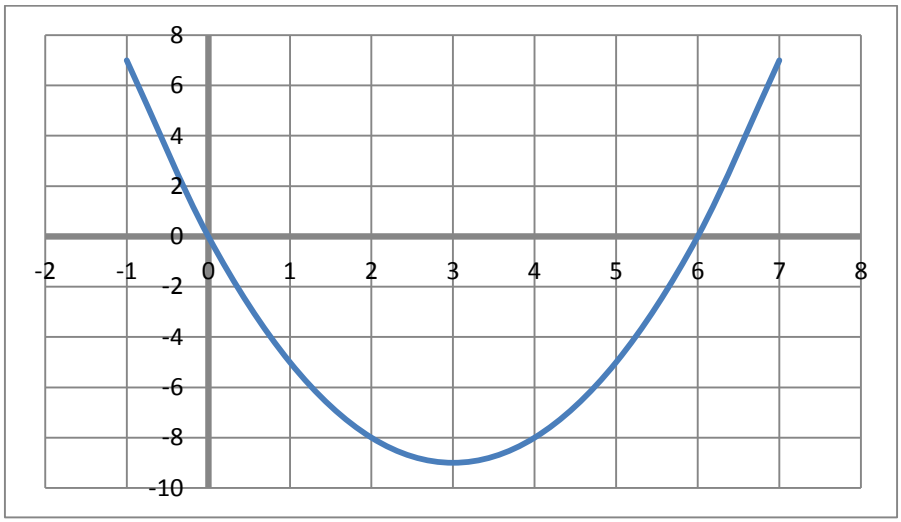


Figura 2.8. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x}$.

Ejemplo 6: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3}$.

$\boldsymbol{x}$	-2	-1	0	1	2	3	4
$\boldsymbol{f(x)}$	5	0	-3	-4	-3	0	5

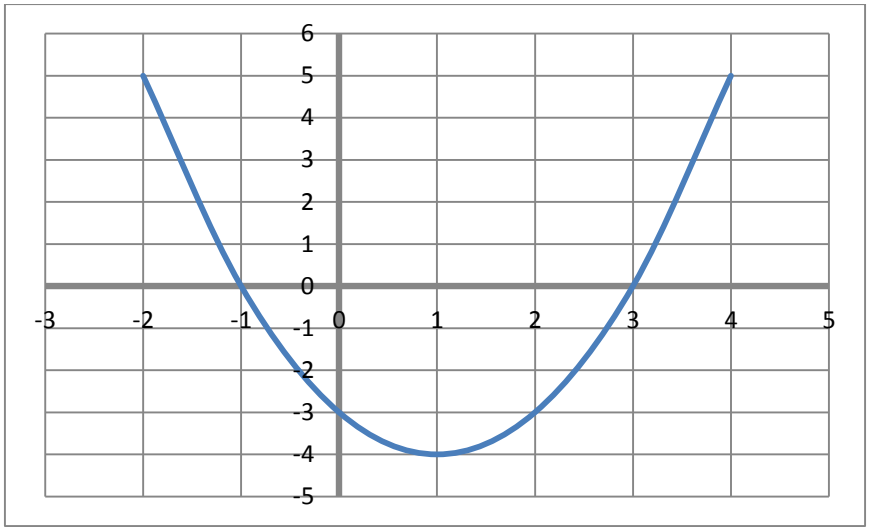


Figura 2.9. Gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ejemplo 7: $f(x) = x^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

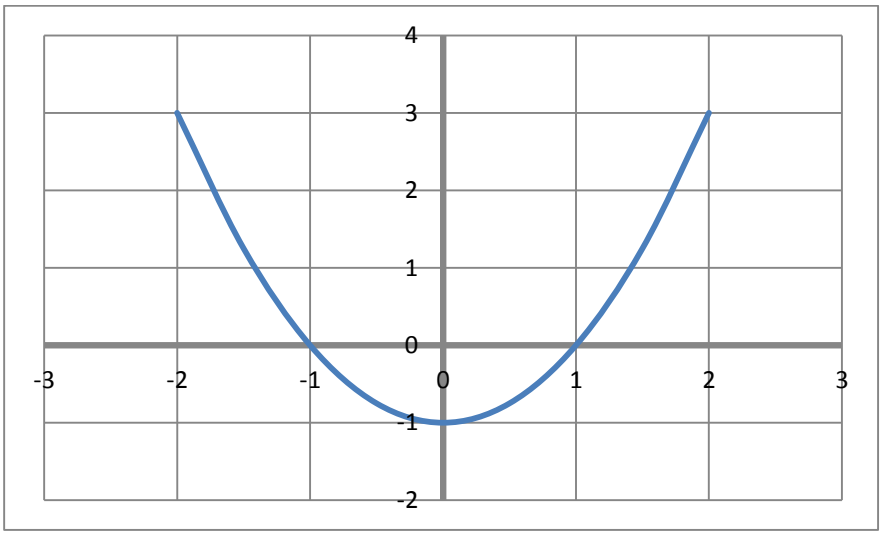


Figura 2.10. Gráfica de $f(x) = x^2 - 1$.

De las gráficas anteriores se puede ver que su término cuadrático es positivo, que el punto que toca en la parte mínima es su vértice y que es cóncava hacia arriba.

Grafiquemos ahora los siguientes ejemplos a partir de su tabulación o tabla para algunos valores de la variable independiente x:

Ejemplo 8: $f(x) = -x^2 + 6x$.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7

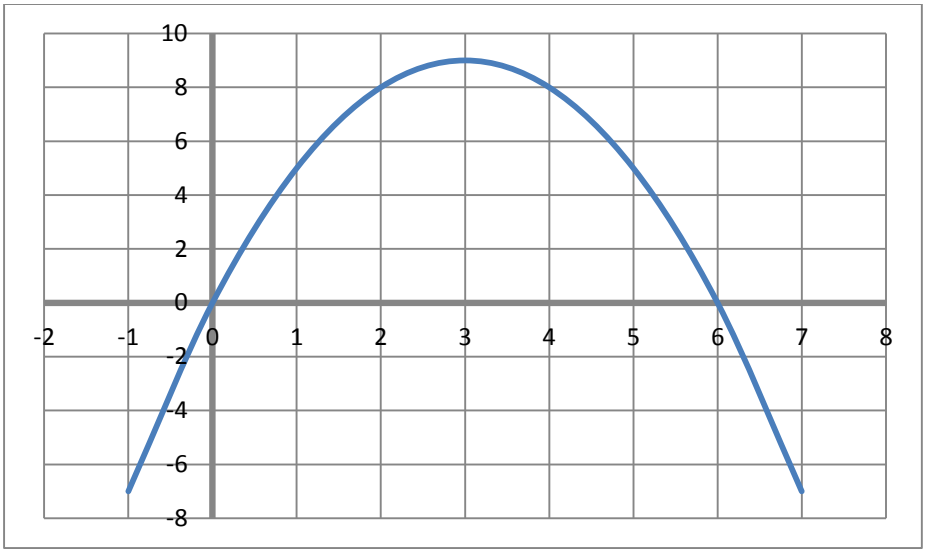


Figura 2.11. Gráfica de $f(x) = -x^2 + 6x$.

Ejemplo 9: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

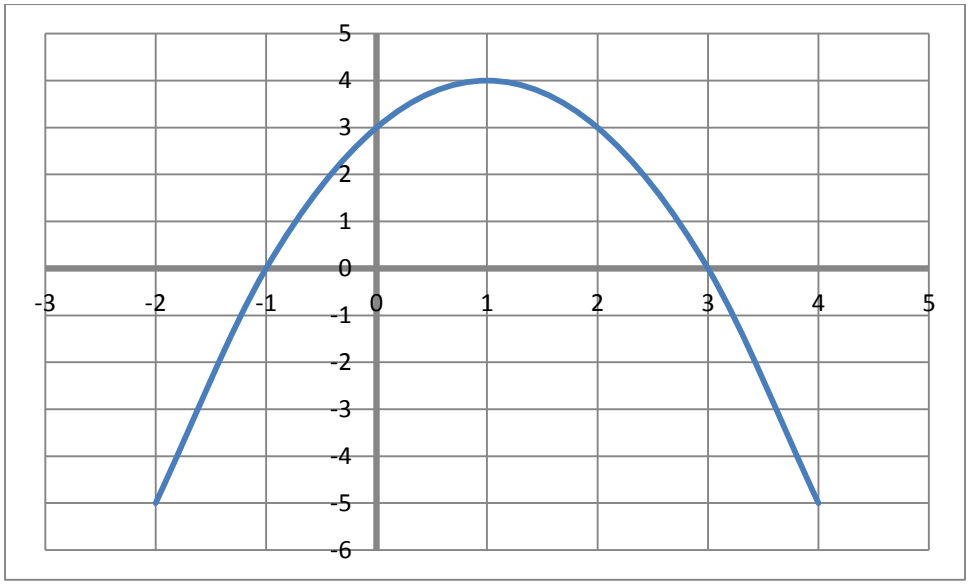


Figura 2.12. Gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Ejemplo 10: $f(x) = -x^2 + 1$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	0	1	0	-3

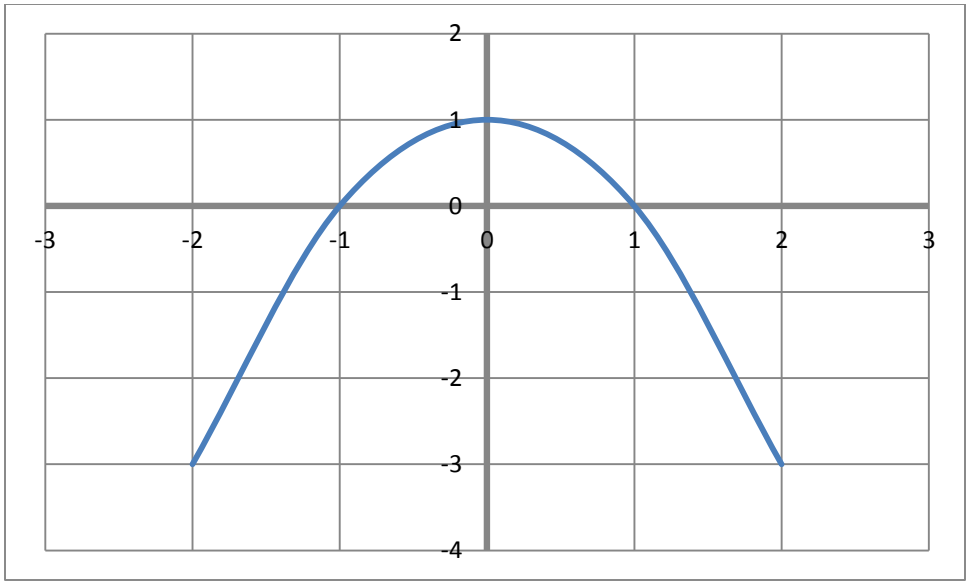


Figura 2.13. Gráfica de $f(x) = -x^2 + 1$.

En las gráficas anteriores se puede ver que su término cuadrático es negativo, que el punto que toca en la parte máxima es su vértice y que es cóncava hacia abajo. Debe observarse que todas estas graficas cortan en algunos puntos al eje “x” y al eje “y”.

2.6 Aplicaciones

✓Aplicación 1. Se tienen 120 metros de tela de alambre con los que se quiere cercar un terreno en forma rectangular que contenga la máxima área posible, encuentra sus dimensiones, es decir, el largo y el ancho.

Solución:

Sean las variables:

$\boldsymbol{A}$ = el área del rectángulo,

$\boldsymbol{x}$ = el largo del rectángulo,

$\boldsymbol{y}$ = el ancho del rectángulo,

$\boldsymbol{P}$ = el perímetro $= 120\ mts.$

De acuerdo a los datos del enunciado de la aplicación, el área del rectángulo es:

$$\boldsymbol{A = xy} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{P = 2x + 2y = 120} \qquad (2)$$

Despejando a la variable "$\boldsymbol{y}$" de la ecuación (2), se tiene que:

$$\boldsymbol{2y = 120 - 2x}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{120 - 2x}{2}}$$

$$\boldsymbol{y = 60 - x} \qquad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$\boldsymbol{A = x(60 - x)}$$

$$\boldsymbol{A = 60x - x^2}$$

Se pude emplear la siguiente notación: $\boldsymbol{A = f(x) = 60x - x^2}$, para tabular y graficar la función considerada:

$\boldsymbol{x}$	0	5	10	15	20	25	**30**	35	40	45	50	55	60
$\boldsymbol{f(x)}$	0	275	500	675	800	875	**900**	875	800	675	500	275	0

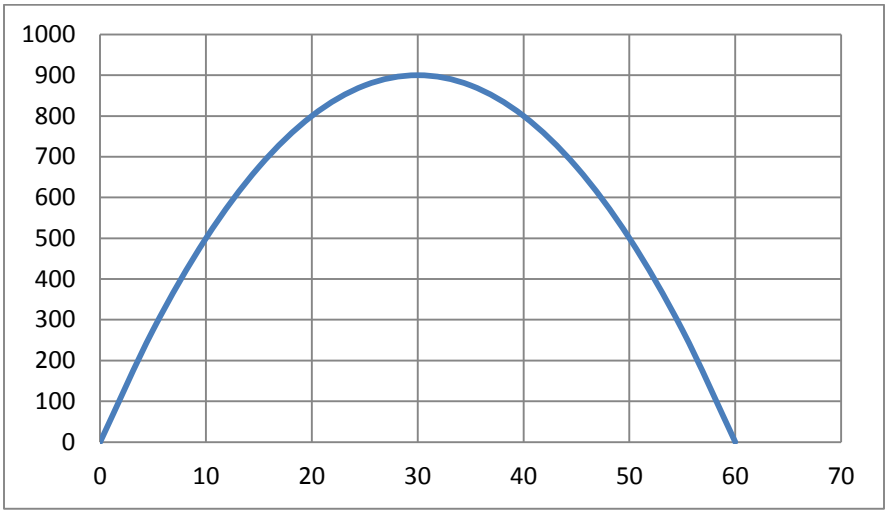


Figura 2.14. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = 60x - x^2}$.

De la tabla inmediata anterior y del análisis de la gráfica de la Figura 18, se deduce y concluye que el terreno cercado con la tela de alambre que contiene la máxima área es un cuadrado cuyos lados miden: $\boldsymbol{x = y = 30\ mt}$, porque si tomamos $\boldsymbol{x = 29\ mt}$ *e* $\boldsymbol{y = 31\ mt}$, el área del terreno resultante es de $\boldsymbol{899}$ metros cuadrados, y es un valor menor al área máxima del terreno cuadrado.

✓Aplicación 2. Se tienen 120 metros de tela de alambre con los que se quiere cercar un terreno en forma rectangular que tiene uno de sus lados en la orilla de un rio y que contenga la máxima área posible, encuentra sus dimensiones, es decir, el largo y el ancho.

Solución:

Sean las variables:

$\boldsymbol{A}$ = el área del rectángulo,

$\boldsymbol{x}$ = el largo del rectángulo,

$\boldsymbol{y}$ = el ancho del rectángulo,

$\boldsymbol{P}$ = el perímetro = $120\ mts$.

De acuerdo a los datos del enunciado de la aplicación, el área del rectángulo es:

$$\boldsymbol{A = xy} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{P = 2x + y = 120} \qquad (4)$$

Despejando a la variable "$\boldsymbol{y}$" de la ecuación (2), se tiene que:

$$\boldsymbol{y = 120 - 2x} \qquad (5)$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (3):

$$\boldsymbol{A = x(120 - 2x)}$$

$$\boldsymbol{A = 120x - 2x^2}$$

Se pude emplear la siguiente notación: $\boldsymbol{A = f(x) = 120x - 2x^2}$, para tabular y graficar la función considerada:

$\boldsymbol{x}$	0	5	10	15	20	25	**30**	35	40	45	50	55	60
$\boldsymbol{f(x)}$	0	550	1000	1350	1600	1750	**1800**	1750	1600	1350	1000	550	0

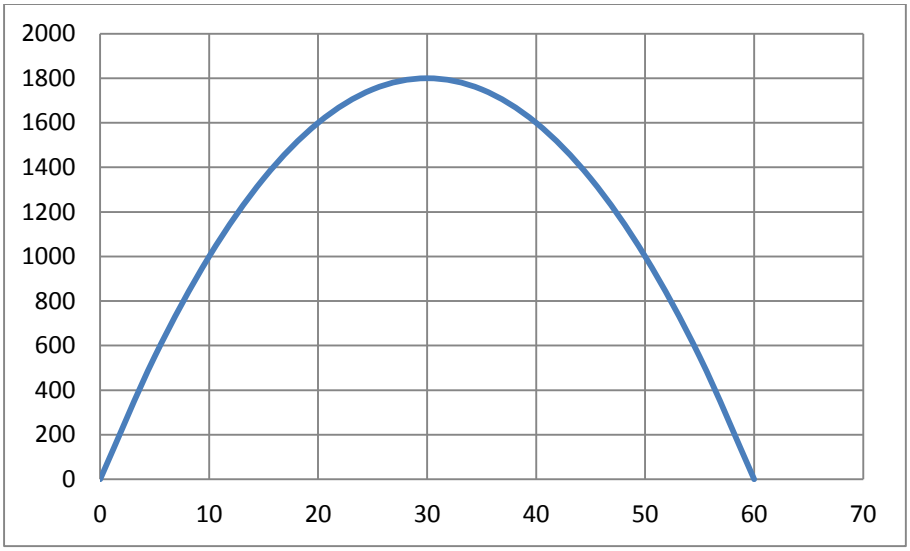


Figura 2.15. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = 120x - 2x^2}$.

De la tabla inmediata anterior y del análisis de la gráfica de la Figura 18, se deduce y concluye que el terreno cercado con la tela de alambre que contiene la máxima área es un rectángulo cuyos lados miden: $\boldsymbol{x = 30\ mt}$ *e* $\boldsymbol{y = 60\ mt}$.

✓Aplicación 3. Un cañón de juguete lanza una bala cuyo movimiento esta descrito por la función cuadrática $\boldsymbol{f(t) = 24t - 4t^2}$, donde $\boldsymbol{f(t)}$ es la altura que sube la bala expresada en metros, y $\boldsymbol{t}$ el tiempo, dado en segundos, que la bala se suspende en el aire antes de regresar al suelo. Tabula, haz la gráfica y señala en cuanto tiempo alcanza su altura máxima y cual será esa altura, también encuentra en cuanto tiempo la bala regresa al suelo.

$\boldsymbol{t}$	0	1	2	**3**	4	5	**6**
$\boldsymbol{f(t)}$	0	20	32	**36**	32	20	**0**

De la tabla inmediata anterior, se puede observar que a los **3** segundos la bala alcanza su altura máxima que es de **36** metros y a los **6** segundos la bala regresa al suelo.

Figura 2.16. Gráfica de $\boldsymbol{f(t) = 24t - 4t^2}$.

☞**Nota**: Como puede observarse, la gráfica de una función cuadrática es una parábola cuyo vértice puede estar en el origen o fuera de este punto.

.

El vértice de la parábola se representa por el par coordenado $\boldsymbol{V(h,k)}$ y si está esta fuera del punto origen, es muy fácil encontrarlo empleando las siguientes formulas:

$$\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a}} \qquad (6) \qquad \text{y}$$

$$\boldsymbol{k = \frac{4ac-b^2}{4a}} \qquad (7)$$

con $\boldsymbol{a \neq 0, b\ y\ c}$ números reales de la ecuación cuadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.

Con las formulas (6) y (7) podemos calcular el vértice de la función cuadrática $\boldsymbol{f(t) = 24t - 4t^2}$, donde se tiene a = -4, b = 24 y c = 0, que es el ejemplo visto anteriormente:

$$\boldsymbol{x = h = -\frac{24}{2(-4)} = \frac{24}{8} = 3}\ segundos$$

$$\boldsymbol{f(x) = k = -\frac{4(-4)(0) - (24)^2}{4(-4)} = 36}\ metros$$

Concluimos que el vértice de la parábola $\boldsymbol{f(t) = 24t - 4t^2}$ es $\boldsymbol{V(h,k) = (3,6)}$, lo cual puede apreciarse claramente en la gráfica de la Figura 20.

✓Tarea: Deduce las ecuaciones (6) y (7) que permiten calcular el vértice de una parábola.

2.7 Recordatorio

Veamos si tenemos buena memoria para recordar algunos productos notables aprendidos antes.

Ejemplo 1. Monomio por binomio

La expresión $\boldsymbol{x(x-6) = x^2 - 6x}$, se puede escribir como función cuadrática: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x}$.

Ejemplo 2. Binomio por binomio

La expresión $(\boldsymbol{x-3})(\boldsymbol{x+1})=\boldsymbol{x^2-2x-3}$, se puede escribir como función cuadrática: $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x-3}$.

Ejemplo 3. Binomios conjugados

La expresión $(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x+1})=\boldsymbol{x^2-1}$, se puede escribir como función cuadrática: $\boldsymbol{f(x)=x^2-1}$.

☞Si observas con cuidado, estos 3 ejemplos de funciones cuadráticas son las que ya hemos tabulado y graficado, del mismo modo se puede encontrar su vértice, pues es importante conocer este punto en la gráfica, que como ya aprendimos es una parábola.

2.8 Ejercicios propuestos.

☞Veamos los ceros de la función cuadrática.

Ejercicio 1. Encuentra los ceros de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x)=x^2-6x}$. Equivale a resolver su ecuación cuadrática $\boldsymbol{x^2-6x=0}$. Indica en qué puntos de coordenadas la función cuadrática corta al eje "$\boldsymbol{x}$".

Ejercicio 2. Encuentra los ceros de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x-3}$. Equivale a resolver su ecuación cuadrática $\boldsymbol{x^2-2x-3=0}$ y aquí puede emplearse la fórmula general o bien el método de factorización. Señala qué puntos de coordenadas la función cuadrática corta al eje "$\boldsymbol{x}$".

Ejercicio 3. ¿Tiene ceros de la función cuadrática $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x+3}$? Justifica tu respuesta. Grafica la precitada función cuadrática.

Ejercicio 4. ¿Tiene solución la función cuadrática $\boldsymbol{f(x)=x^2+2x+4}$ en los números reales? ¿La precitada función cuadrática corta en algunos puntos al eje "$\boldsymbol{x}$". Justifica tu respuesta.

☞Podemos preguntarnos entonces ¿si es o no importante que la gráfica de una función cuadrática corte en algunos puntos al eje "x"?, parece que no lo es si vemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio 5. La elaboración de chocolates tiene un costo de producción dado por la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 10$, donde $f(x)$ es la función costo de producción dada en pesos y x es el número de chocolates que se producen. ¿Cuántos chocolates pueden hacerse con $ 17.00, si gaste $ 50.00? Si hice 8 chocolates ¿cuánto dinero gasté?

Sugerencia: completa la siguiente tabla y con los valores obtenidos hacer la gráfica correspondiente:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	10	5			2			17					

Ejercicio 6. Un cañón de juguete lanza una bala cuyo movimiento esta descrito por la función cuadrática $h(t) = 24t - 4t^2$, donde $h(t)$ es la altura que sube la bala expresada en metros, y t el tiempo, dado en segundos, que se suspende en el aire antes de regresar al suelo dado en segundos. Tabula los valores de la siguiente tabla y grafica. Señala el motivo por el que la bala se sigue moviendo después de los 6 segundos.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$h(t)$	0	20	32	36	32	20	0	-28	-64

¿Es posible que el cañón esté colocado en la azotea de un edificio, sobre un puente, o cerca de un precipicio y que por ello la bala cae más abajo del nivel del que se lanzó que es $h(0) = 0$?

Ejercicio 7. La función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 16x$ describe el ingreso en un proceso de manufactura de cualquier objeto, donde $f(x)$ es el ingreso por el proceso de producción dado en pesos, x es el tiempo que tarda el proceso de

manufactura de un objeto que se produce expresado en horas. ¿Si tardo 2 horas elaborando un objeto, cuanto tendré de ingresos?, si tardo 3 horas elaborando un objeto, ¿cuáles serán mis ingresos? Si gané exactamente $14,00 ¿cuánto tiempo dedique a la elaboración de un objeto?

Observa la siguiente tabla y la gráfica que de ella se desprende:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	14	24	30	32	30	24	14	0

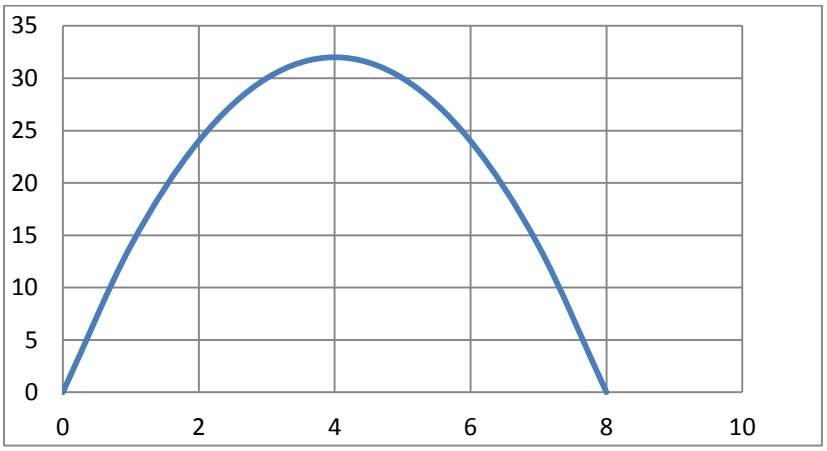


Figura 2.17. Gráfica de $f(x) = -2x^2 + 16x$.

Nota que si trabajo 2 horas, mis ingresos serán de $ 24,00, mientras que si trabajo 3 horas mis ingresos serán $ 30,00, si gane $ 14,00 trabaje una hora en la manufactura de un objeto. Podemos observar que el tiempo exacto para hacer el objeto son 4 horas con una ganancia máxima de $ 32.00, si un trabajador se tarda más de 4 horas haciendo el objeto ya no le conviene a nadie esto, ni al trabajador ni a quien le encargo el objeto a producir.

Ejercicio 8. Sea la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x - 48$ que describe la ganancia en pesos que tiene el dueño de un puesto que vende cocteles de fruta, cuya inversión en fruta y otros gastos se puede recuperar con la venta de los cocteles, siendo x el número de cocteles de fruta vendidos al día.

¿Qué perdidas tendrá el señor de no vender ni un solo coctel de frutas en el día?, ¿cuál será su ganancia si vende 6 cocteles de fruta?, ¿cuántos cocteles de fruta deben venderse para que el vendedor gane $ 32,00 o más dinero?

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-48	-45	-40	-33	-24	-13	0	15	32	51

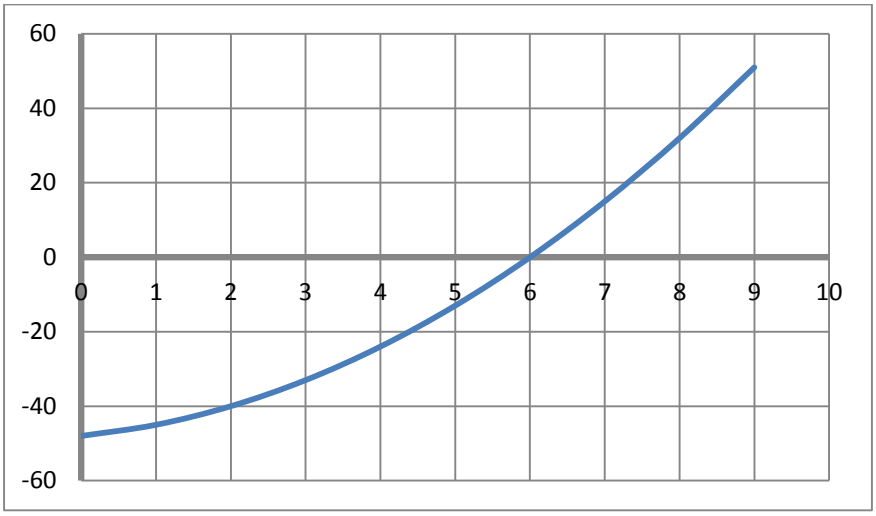


Figura 2.18. Gráfica de $f(x) = x^2 + 2x - 48$.

Puede observarse que si el señor no vende un coctel de fruta tendrá una pérdida de $48.00, si vende exactamente 6 cocteles no gana nada de dinero, el vendedor debe vender 8 cocteles para ganar $32.00, pero si vende más de 8 cocteles ganara más dinero.

Ejercicio 9. Un vendedor de productos de limpieza que va de casa en casa tiene una ganancia en pesos descrita por la función cuadrática $f(x) = x^2 + 12x$, con x representando el número de productos de limpieza que vende al día, ¿cuál es su ganancia si vende 4 productos?, si ganó $160.00 ¿cuántos productos de limpieza vendió?, ¿cuál será su ganancia si vende exactamente 10 productos?

Para responder correctamente a las preguntas antes formuladas, es conveniente hacer la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	0	13	28	45	64	85	108	133	160	189	220

La gráfica correspondiente a la tabla anterior es:

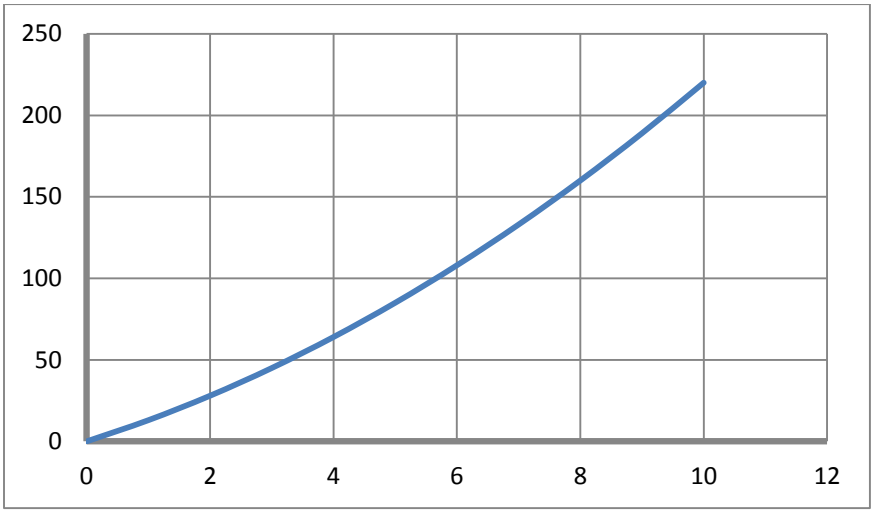


Figura 2.19. Gráfica de $f(x) = x^2 + 12x$.

De la tabla inmediata anterior y de la gráfica de la Figura 23, se observa que si el vendedor vende 4 productos gana \$64.00, si ganó \$160.00 entonces vendió 8 productos y si vende 10 productos entonces gana \$ 220.00.

✓Observación:

En cierta medida, es relativamente sencillo graficar “a mano” una función cuadrática si tomamos en cuenta lo siguiente: como el valor de h del vértice $V(h,k)$ está en el eje "x", podemos proponer 2 valores diferentes a este a la misma distancia, tanto a la derecha como a la izquierda; si por ejemplo $h = 5$, proponemos los valores $x = 2$ y también $x = 8$ y evaluar en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener así 2 puntos más, y junto con el valor del vértice es posible graficar la función cuadrática con estos 3 puntos. El siguiente ejemplo nos muestra como graficar la función cuadrática usando los lineamientos inmediatos anteriores:

Ejemplo 1. Dada la función cuadrática $f(x) = 24x - 4x^2$, donde se tiene que $a = -4, b = 24\ y\ c = 0$, encontrar su vértice y 2 puntos más de coordenadas para poder graficarla sin dificultad alguna.

Usando las fórmulas:

$\boldsymbol{h = -\frac{b}{2a}}$ (6) y

$\boldsymbol{k = \frac{4ac-b^2}{4a}}$ (7), se tiene que:

$$\boldsymbol{x = h = -\frac{24}{2(-4)} = 3}$$

$$\boldsymbol{f(x) = k = \frac{4(-4)(0) - (24)^2}{4(-4)} = \frac{576}{16} = 36}$$

Si ahora $\boldsymbol{x = 1}$, entonces $\boldsymbol{f(1) = 20}$ y tenemos el punto de coordenadas $\boldsymbol{(1, 20)}$; si $\boldsymbol{x = 5}$, entonces $\boldsymbol{f(5) = 20}$ y tenemos el punto de coordenadas $\boldsymbol{(5, 20)}$; y con el vértice $\boldsymbol{V(h, k) = (3, 36)}$ se puede construir la gráfica de la parábola que es simétrica a una recta vertical que pasa por su vértice, como se muestra en la siguiente figura:

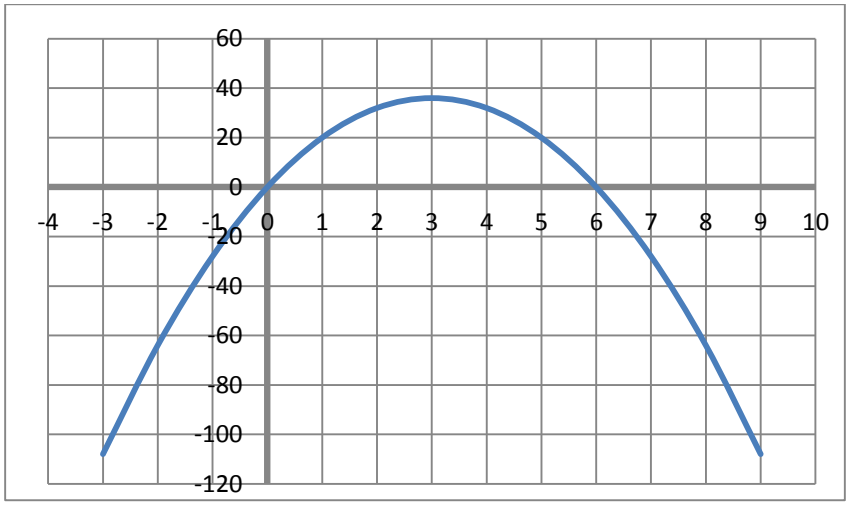


Figura 2.20. Gráfica de $\boldsymbol{f(x) = 24x - 4x^2}$.

Ejemplo 2. Supongamos que deseamos graficar la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 8x + 7}$, con coeficientes $\boldsymbol{a = 1, b = -8}$ y $\boldsymbol{c = 7}$, usando la ecuaciones (6) y (7) precedentes, se tiene que:

$$x = h = -\frac{(-8)}{2(1)} = 4$$

$$f(x) = k = \frac{4(1)(7) - (-8)^2}{4(1)} = \frac{28 - 64}{4} = \frac{-36}{4} = -9$$

Así, el vértice tendrá como sus coordenadas el punto $V(4, -9)$. Ahora tomemos 2 valores de x a la misma distancia, tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 4$, sean estos $x = 0$ y $x = 8$. A continuación encontramos las coordenadas de 2 puntos, es decir, $f(0) = (0)^2 - 8(0) + 7 = 7$, lo cual nos da el punto de coordenadas $(0, 7)$. De modo semejante, $f(8) = (8)^2 - 8(8) + 7 = 7$, lo que nos da el punto de coordenadas $(0, 7)$. Con estos 3 puntos de coordenadas que hemos encontrado, se puede graficar así esta función cuadrática.

✓Tarea: Con la información inmediata anterior desarrollada, haz la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 8x + 7$.

Ejercicio 10. Grafica con 3 puntos de coordenadas (entre ellos su vértice) las siguientes funciones cuadráticas:

(a) $f(x) = -x^2 + 2x$
(b) $g(x) = -3x^2$
(c) $f(x) = 2x^2$
(d) $g(x) = x^2 - 2x + 1$
(e) $f(x) = 2x^2$
(f) $g(x) = x^2 - 8x + 7$
(g) $f(x) = 2x^2$
(h) $g(x) = x^2 - 8x$

✓Observación:

Ahora veamos los siguientes ejemplos de graficas de funciones cuadráticas, donde a partir de las mismas se debe encontrar precisamente a la función cuadrática que la representa.

Ejemplo 3. Encuentra la función cuadrática que representa a la gráfica de la parábola que pasa por los puntos de coordenadas $(-\mathbf{2},\mathbf{0})$, $(\mathbf{6},\mathbf{0})$ y es cóncava hacia arriba.

Como se sabe que la gráfica pasa por los puntos de coordenadas $(-\mathbf{2},\mathbf{0})$, $(\mathbf{6},\mathbf{0})$ y es cóncava hacia arriba, es fácil encontrar su función cuadrática; esta es de la forma $\boldsymbol{f(x)=(x+2)(x-6)=x^2-4x-12}$ y como su término cuadrático es positivo, es correcta la forma de la cuadrática:

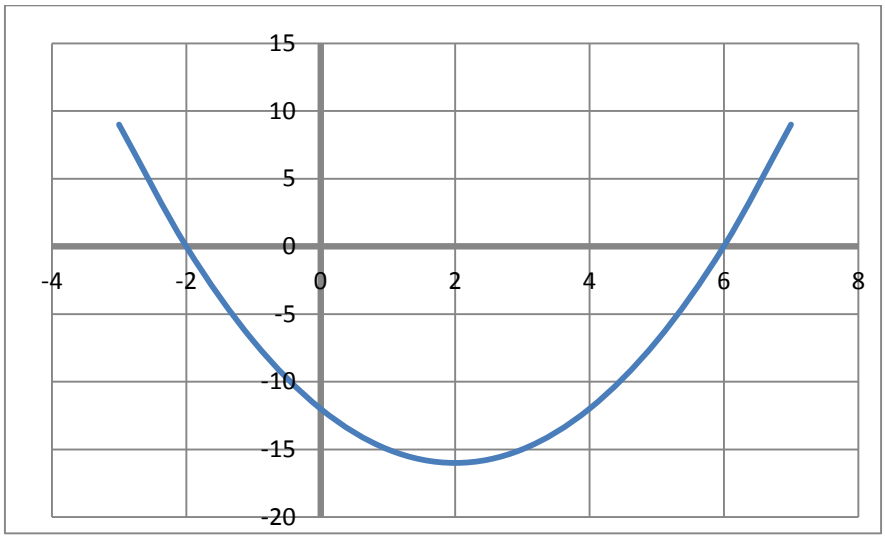


Figura 2.21. Gráfica de $\boldsymbol{f(x)=x^2-4x-12}$.

Ejemplo 4. Encuentre la función cuadrática que representa a la gráfica de la parábola que pasa por los puntos de coordenadas $(-\mathbf{3},\mathbf{0})$, $(\mathbf{5},\mathbf{0})$ y es cóncava hacia abajo.

Como se sabe que la gráfica pasa por los puntos de coordenadas $(-\mathbf{3},\mathbf{0})$, $(\mathbf{5},\mathbf{0})$ y es cóncava hacia abajo, es fácil encontrar su función cuadrática; esta es de la forma $\boldsymbol{f(x)=-(x+3)(x-5)=-x^2+2x+15}$ y como su término cuadrático es negativo, es correcta la forma de la cuadrática:

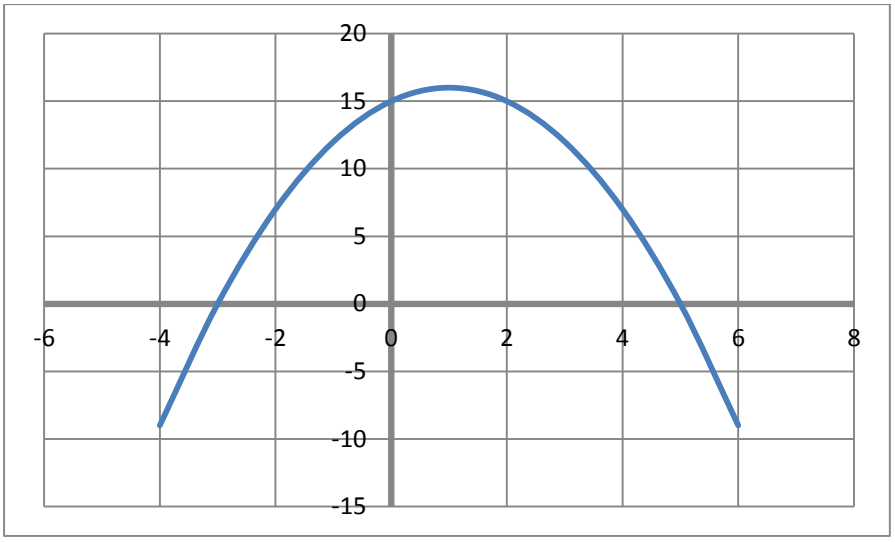


Figura 2.22. Gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 15$.

Ejercicio 11. Encuentra la función cuadrática que representa a la gráfica de la parábola que pasa por los puntos de coordenadas $(-1, 0)$, $(7, 0)$ y es cóncava hacia abajo.

Ejercicio 12. Encuentra la función cuadrática que representa a la gráfica de la parábola que pasa por los puntos de coordenadas $(-4, 0)$, $(2, 0)$ y es cóncava hacia arriba.

Unidad 3. Elementos básicos de geometría plana

3.1 Introducción

La geometría es uno de los pilares de la matemática, su método axiomático impacto todo el quehacer de la disciplina. En la unidad se presentas los conceptos básicos de geometría, que servirán para dar un panorama de la geometría.

El geogebra como herramienta, se utiliza para desarrollar construcciones que el alumno puede hace dinámicas moviendo los puntos independientes de las construcciones que el software presenta en azul.

La formas de aprender geometría es haciendo construcciones y resolviendo problemas, los cuales permiten aclarar los conceptos, o darnos cuenta de que no los hemos aprendido.

Las construcciones que se proponen y presentan se pueden hacer con regla y compás o en el software dinámico. La importancia del software geogebra es que se pueden hacer conjeturas, para ayudar al estudiante a entender que hay resultados o hechos que siempre son ciertos, fijándonos en invariantes.

3.2 Un poco de Historia

La palabra geometría se deriva del griego *geo* "tierra", *metrein* "medir". El tema central de esta rama de la matemática es el problema de la medida. En la Mesopotamia, del 2000 a. C. al 500 d.C., se tiene registro de algunos avances en este sentido, tales como: el cálculo de áreas, del cuadrado, del círculo (con un valor aproximado de 3 para el número), cálculo de volúmenes de cuerpos, semejanza de figuras, e incluso hay autores que afirman que esta civilización conocía el teorema de Pitágoras aplicado a problemas particulares

Según Herodoto los egipcios fueron los padres de la geometría. Considerando las grandes construcciones que llevaron a cabo los egipcios se podría esperar una geometría muy avanzada; sin embargo, con la información de que se dispone a la

fecha, no se puede afirmar tal cosa. Se centraron principalmente en el cálculo de áreas y volúmenes, encontrando, por ejemplo, un valor aproximado para el área del círculo, considerando como 3.1605. Sin embargo, el desarrollo geométrico de los egipcios adolece de teoremas y demostraciones formales.

Del 800 a.C. al 400 d.C., la cultura griega, contribuyó a la solución de problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas. Se realizaban operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, cálculo con fracciones, resolución numérica de problemas que conducen a ecuaciones de 1er y 2º grado, problemas prácticos de cálculo relacionados con la construcción, geometría, agrimensura, etc...

Figura 3.1. Pirámide egipcia.

En el siglo VI a.C., Tales de Mileto, Matemático griego (630-545 a.C.), fue uno de los 7 sabios de la antigüedad, se destacó tanto en filosofía como en matemáticas. Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico. Fundó la geometría como una ciencia que compila una colección de proposiciones abstractas acerca de formas ideales y pruebas de estas proposiciones. Fue el primero en ser capaz de calcular la altura de las pirámides de Egipto.

Pitágoras de Samos, matemático griego (582-500 a.C.). Se piensa que fue discípulo de Tales. Fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona, al sur de Italia. En aquel centro de estudios se discutía filosofía, matemáticas y ciencias naturales. Las enseñanzas se transmitían por vía oral y todo se atribuía al venerado fundador. Entre otros aspectos estudiaron los números enteros y su clasificación. También se les atribuye la demostración del teorema de Pitágoras y como consecuencia, el descubrimiento de los números irracionales como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc. En estos tiempos aún no hay una distinción muy clara entre la aritmética y la geometría.

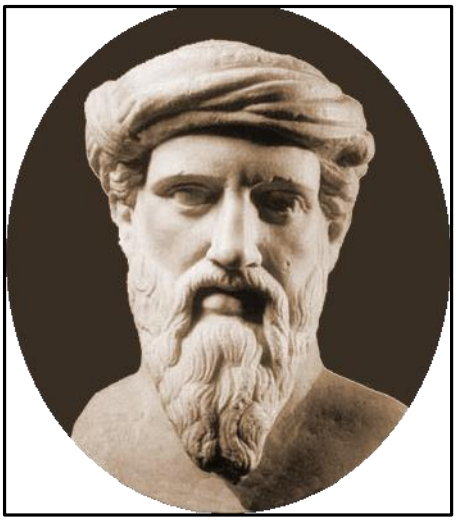


Figura 3.2. Pitágoras de Samos.

Herodoto, historiador griego (484-425 a.C.), utilizó por primera vez la palabra griega geometría (medida de la tierra) en su gran épica sobre las guerras persas, en donde escribe que en el antiguo Egipto fue usada "la geometría" para encontrar la distribución adecuada de la tierra después de los desbordamientos anuales del Nilo.

En el siglo IV a.C., Eudoxo de Cnidos, matemático griego (408-355 a.C.), fue conocido por sus trabajos sobre la teoría de la proporción y el llamado método de exhaución, aportaciones que hicieron posible determinar áreas y volúmenes rigurosamente, y fueron el antecedente del Cálculo Integral.

Gracias a Euclides, matemático griego, (325-265 a.C.), la geometría clásica griega ha sobrevivido a través de la famosa obra escrita por él, conocida como los

Elementos de Euclides. Esta obra está compuesta de trece libros y es considerada como la obra más famosa de la historia de las matemáticas. Es considerado por ello como el padre de la Geometría

Figura 3.3. Euclides.

Arquímedes de Siracusa, matemático griego (287-212 a.C.), Realizó importantes aportaciones a la geometría. Inventó la forma de medir el área de superficies limitadas por figuras curvas y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas. También elaboró un método para calcular una aproximación al número π.

Apolonio de Perga, matemático griego (262-190 a.C.), escribió un tratado en ocho tomos sobre las cónicas y estableció sus nombres: elipse, parábola e hipérbola. Este tratado sirvió de base para el estudio de la geometría de estas curvas hasta los tiempos del filósofo y científico francés René Descartes en el siglo XVII.

Alrededor del siglo I d.C, las culturas china e india, principalmente hicieron aportaciones sobre la resolución de problemas de distancias y semejanzas de cuerpos. También hay quien afirma que estas dos civilizaciones llegaron a enunciados de algunos casos particulares del teorema de Pitágoras e incluso que desarrollaron algunas ideas sobre la demostración de este teorema.

Del siglo II al XII d.C, la geometría avanzó muy poco desde finales de la era griega hasta finales de la edad media. En el siglo XIII Nassir al-Din al-Tusi, matemático árabe (1201-1274), escribió libros sobre geometría directamente influenciados por las obras clásicas, pero contribuyó con distintas generalizaciones y estudios críticos, como los relativos al axioma euclidiano del paralelismo, que pueden considerarse como estudios precursores de las geometrías no euclidianas.

En el siglo XIV Nicolás Oresme, matemático francés (1323-1382), llegó a utilizar en una de sus obras coordenadas rectangulares, aunque de forma rudimentaria, para la representación gráfica de ciertos fenómenos físicos.

En el siglo XVII René Descartes, Matemático francés (1596-1650), Introdujo el álgebra en el estudio de las secciones cónicas, esto es, representó las secciones cónicas a través de ecuaciones de segundo grado en dos variables, creando con esta innovación la geometría analítica. Introdujo también el sistema coordenado de referencia, llamado sistema cartesiano, entre otras aportaciones. Estas innovaciones fueron planteadas en uno de sus ensayos llamado “La geometría” que incluyó en su famoso libro “El discurso del método” publicado en 1637.

En el siglo XVII, Pierre de Fermat, Matemático francés (1601-1665), Desarrolló de manera independiente a los trabajos de René Descartes una geometría de coordenadas, pero a diferencia de éste, pensaba en la geometría analítica sólo como una extensión de las ideas de Euclides y Apolonio. Estas ideas fueron publicadas en 1679, después de su muerte, el artículo “Introducción a los lugares planos y sólidos”.

En el siglo XVII Gottfried Wilhelm Leibniz, Matemático alemán (1646-1716), En un artículo que publicó Leibniz en 1679, llamado “Analysis situs o geometría situs”, propuso en la formulación de algunas propiedades de las formas geométricas, el uso de símbolos especiales para representarlos y la combinación de estas propiedades para crear otras. Con esta propuesta Leibniz sentó las bases para lo que actualmente se conoce como Topología. La topología es asociada

generalmente a los estudios de las propiedades cualitativas de los objetos geométricos.

En el siglo XVIII Leonard Euler, matemático y físico suizo (1707-1783), sistematizó la geometría analítica con todo rigor y formalidad. Introdujo, además de las coordenadas rectangulares en el espacio, las oblicuas y las polares. Asimismo, planteó las transformaciones de los sistemas de coordenadas. También clasificó las curvas según el grado de sus ecuaciones, estudiando sus propiedades generales. En otros apartados de sus obras trató las secciones cónicas, las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, las ramas infinitas y asintóticas de las secciones cónicas y clasificó las curvas de tercer y cuarto orden. También estudió las tangentes, problemas de curvaturas, diámetros y simetrías, semejanzas y propiedades afines, intersección de curvas, composición de ecuaciones de curvas complejas, curvas trascendentes y la resolución general de ecuaciones trigonométricas. Todos estos aspectos se recogen en el segundo tomo de la obra "Introducción al análisis de los infinitos", publicada en 1748, que Euler dedicó exclusivamente a la geometría analítica.

Alrededor de 1830, Nicolai Ivanovich Lobachevsky, matemático ruso (1793-1856), János Bolyai Matemático húngaro (1802-1860), desarrollo de las geometrías no euclidianas. Publicaron en forma independiente que habían podido construir una geometría que satisfacen todos los postulados de la geometría Euclidiana excepto por el postulado de las paralelas. Por lo que este postulado se ganó el estatus de un axioma que caracteriza a la geometría Euclidiana

Alrededor de 1850, William Rowan Hamilton (1805-1865), matemático y físico irlandés, desarrolló lo que hoy conocemos como producto vectorial o producto cruz de vectores como un resultado alterno de su trabajo con el álgebra de los cuaternios.

En el año de 1887 Henri Poincaré, matemático francés (1854-1912), describió un modelo concreto de una geometría No-Euclidiana en dos dimensiones, el plano hiperbólico; este modelo es conocido ahora como el disco de Poincaré.

La geometría se presenta en la actualidad en diversas construcciones modernas. En la figura 3.2, tenemos dos fotos de la Torre mayor en la ciudad de México.

Figura 3.4. Torre mayor, en la Ciudad de México.

El lunes 26 de agosto de 2013, el sitio Google, en su página principal, conmemoró el natalicio de Rufino Tamayo con un 'doodle' (ver Figura 3.5). El muralista mexicano cumpliría 114 años y fue recordado con su obra "Dualidad", en ese famoso sitio web.

Figura 3.5. Mural "Dualidad" de Rufino Tamayo.

En ella se observan directamente trazos geométricos de triángulos, círculos y curvas, lo que nos muestra su amplio conocimiento de la geometría del gran muralista mexicano. A través de los triángulos necesariamente tenemos segmentos de recta, puntos de intersección de segmentos y ángulos.

El Museo Universitario de Arte Contemporáneo (MUAC) de la UNAM, en el verano de 2013 presentó una exposición de geometría (La persistencia de la geometría), implícitamente, exhibiendo la importancia de ésta parte de la matemática.

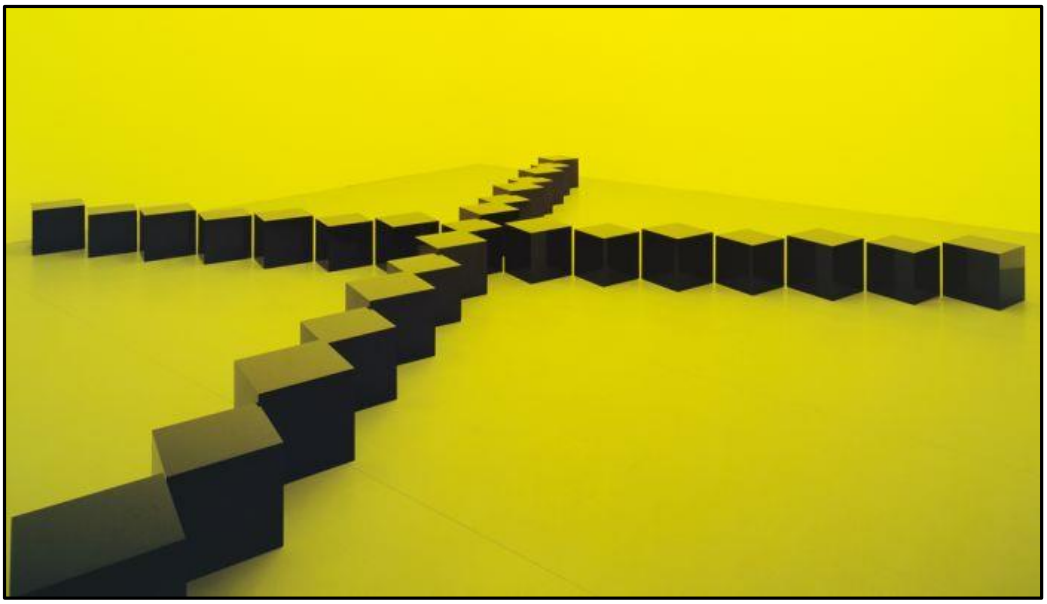


Figura 3.6. Exposición en el MUAC de la UNAM, "La Persistencia de la Geometría".

3.3 Elementos básicos de la Geometría

Una vez que se tiene los elementos básicos de la geometría, como son el punto, la recta, el segmento de recta, el plano y el círculo, se puede a partir de ellos crear más figuras.

Euclides partió de objetos no definidos, es decir, figuras que no necesitaba definir pero que a partir de ellas se podían definir el resto de figuras.

Los objetos no definidos son el punto, la recta y el plano. Aunque no se definen podemos hablar de ellos.

a) Un **punto** es el objeto fundamental en geometría, el punto representa solo posición y no tiene dimensión, es decir, largo cero, ancho cero y altura cero. Se representan por letras mayúsculas:

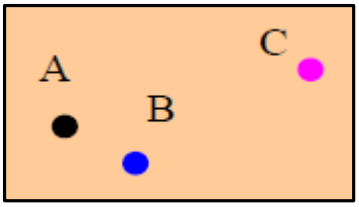


Figura 3.7. Tres puntos.

b) La **recta** tiene solo longitud, no tiene ancho ni altura ni grosor. Es un conjunto infinito de puntos que se extienden en una dimensión en ambas direcciones. Una recta se puede representar por:

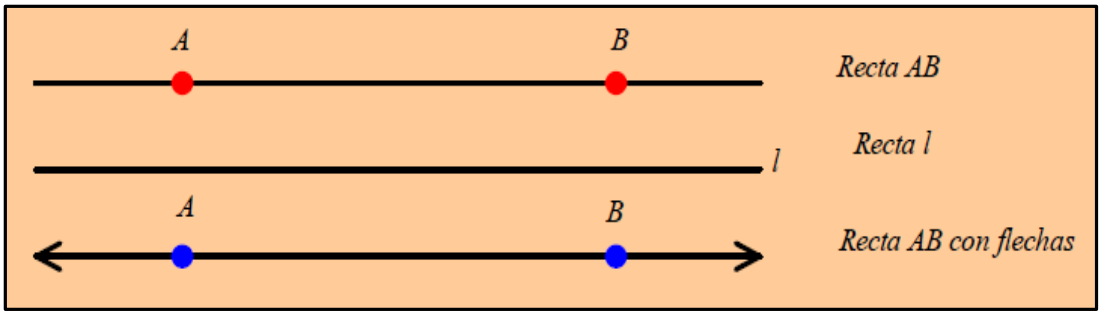


Figura 3.8. Una recta y sus representaciones.

c) La **semirrecta** la definimos como la porción de una recta que tiene principio pero no tiene fin.

d) Un **segmento de recta** es una porción de la recta con principio y con fin, es decir sabemos dónde empieza y donde termina y por ende lo podemos medir.

e) Un **plano** no tiene ancho ni largo, ni altura ni grosor. Un plano es una superficie en dos dimensiones, se puede pensar como un conjunto de puntos infinitos en dos dimensiones.

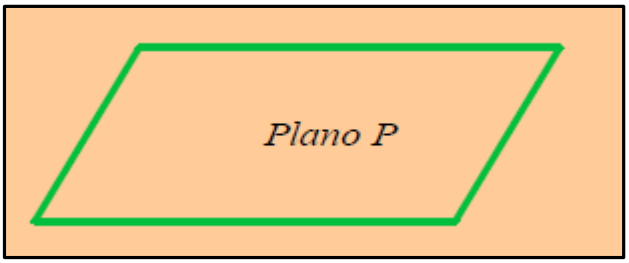


Figura 3.9. Un plano.

En el software geogebra, de uso libre, se pueden manipular y trazar fácilmente, puntos, rectas y planos, y desarrollar la geometría que los griegos desarrollaron solo con regla y compás Actualmente se utiliza papel lápiz para hacer geometría, así como el geogebra, que también se dice que es un software dinámico, es decir, que los objetos geométricos una vez trazados, se pueden mover, a diferencia de la geometría hecha con lápiz y papel, que es estática.

Todo lo que se puede hacer con lápiz y papel en geometría, se puede hacer con el geogebra, pero su dinamismo, el movimiento de objetos, nos permite hacer conjeturas más rápido.

En geogebra se usa el icono resaltado en la Figura 3.10, para trazar el **punto A**.

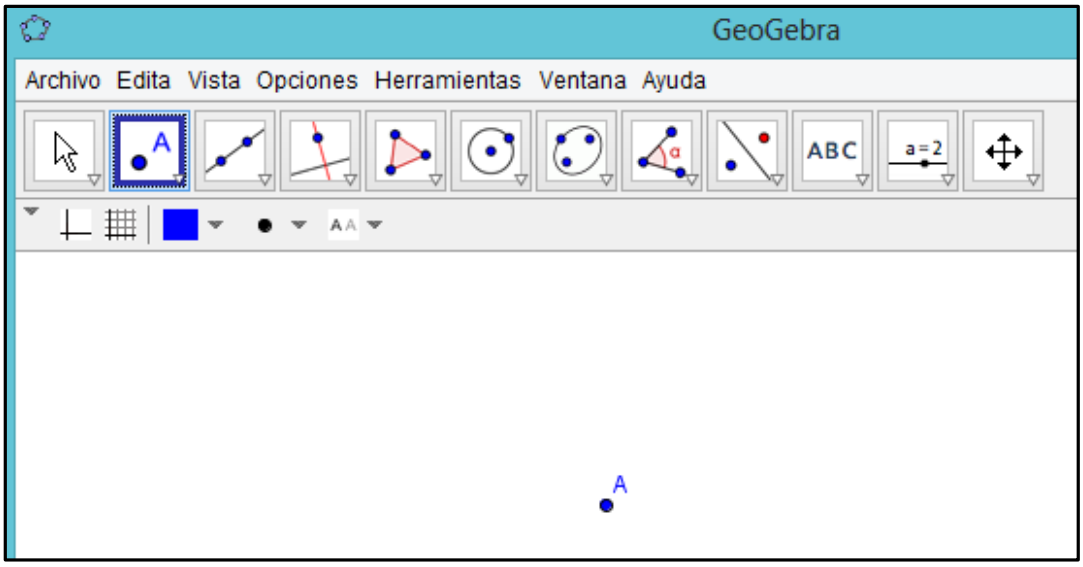


Figura 3.10. Trazo de un punto en geogebra.

Cada icono de los comandos principales tiene en realidad varios comandos, agrupados por acciones similares, y se muestran dando clic en el triangulito inferior derecho del mismo icono, y seleccionando después el comando necesitado.

Se utiliza el comando dado por el icono resaltado en la figura 3.11, para trazar una **recta** que pasa por el punto A y el punto B.

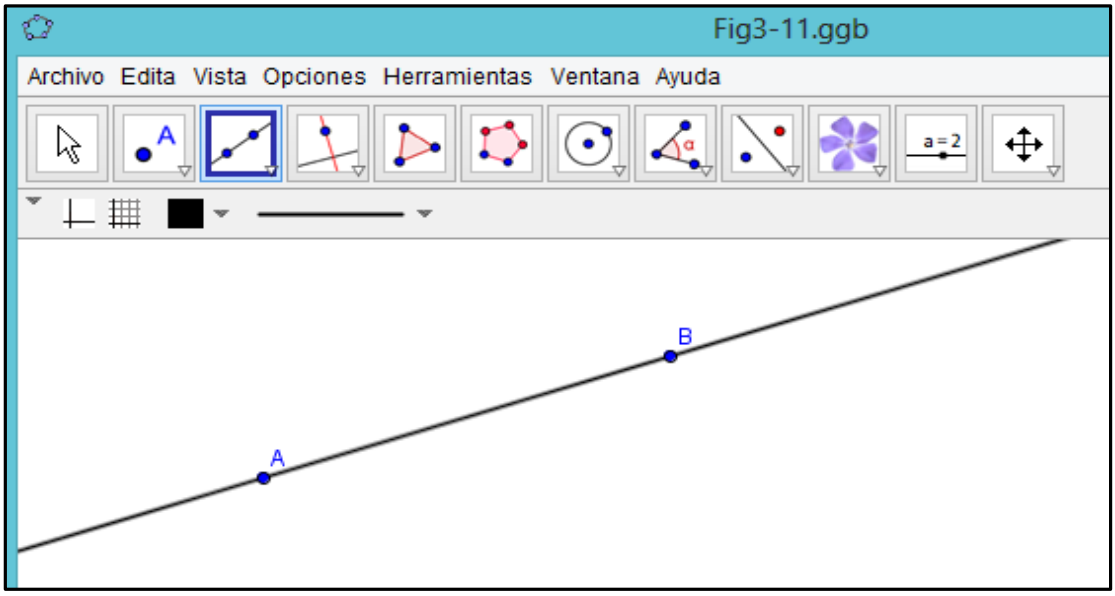


Figura 3.11. Trazo de una recta en geogebra.

Se utiliza el comando dado por el icono resaltado en la Figura 3.12, para trazar una **semirrecta** desde el punto A al punto B.

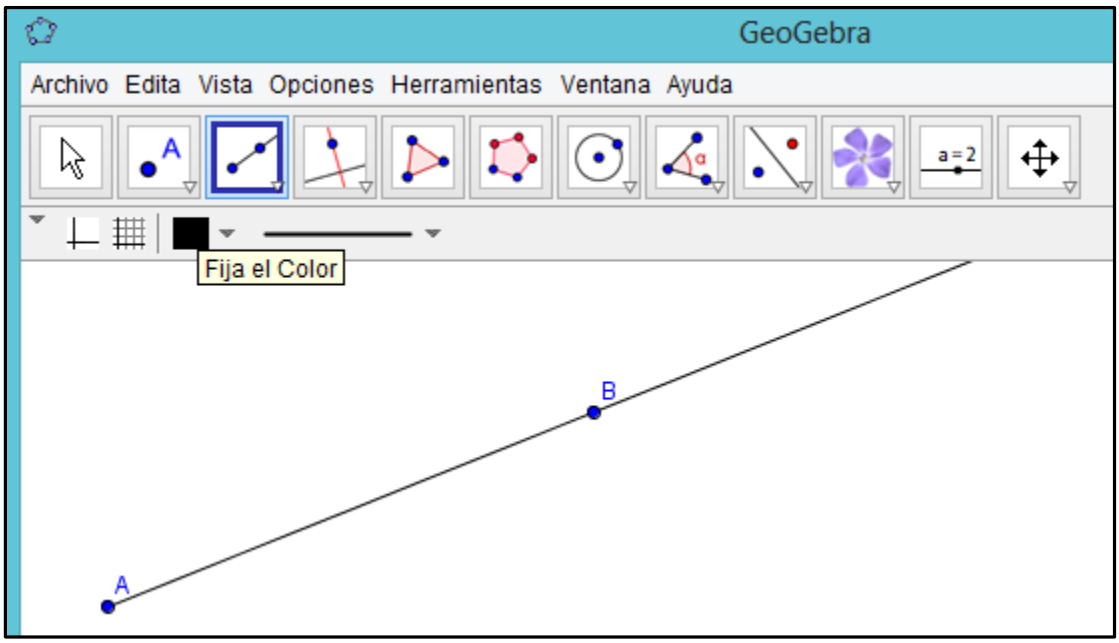


Figura 3.12. Trazo de una semirrecta en geogebra.

Se utiliza el tercer icono en la Figura 3.13, para trazar un segmento de **recta** que pasa por el punto A y el punto B.

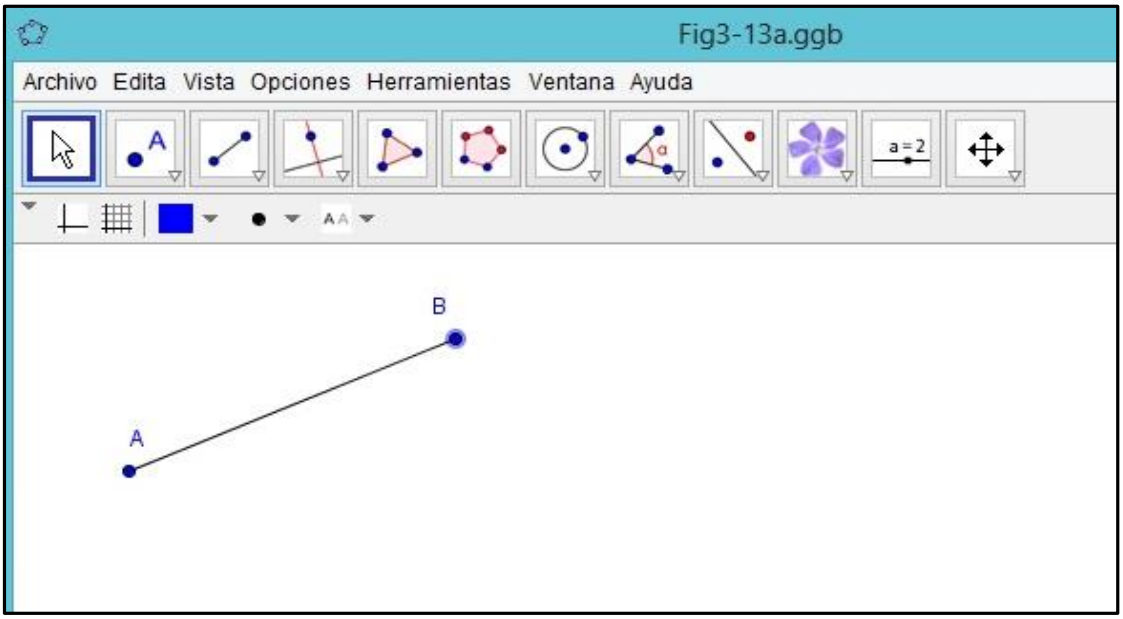


Figura 3.13. Un segmento de recta en geogebra.

Un **ángulo** es la apertura entre dos rectas que se cortan. En geogebra se puede construir un triángulo de varias formas. Una de ellas es elegir tres puntos, uno en cada uno de sus lados, y el vértice. La otra es seleccionar dos de sus lados.

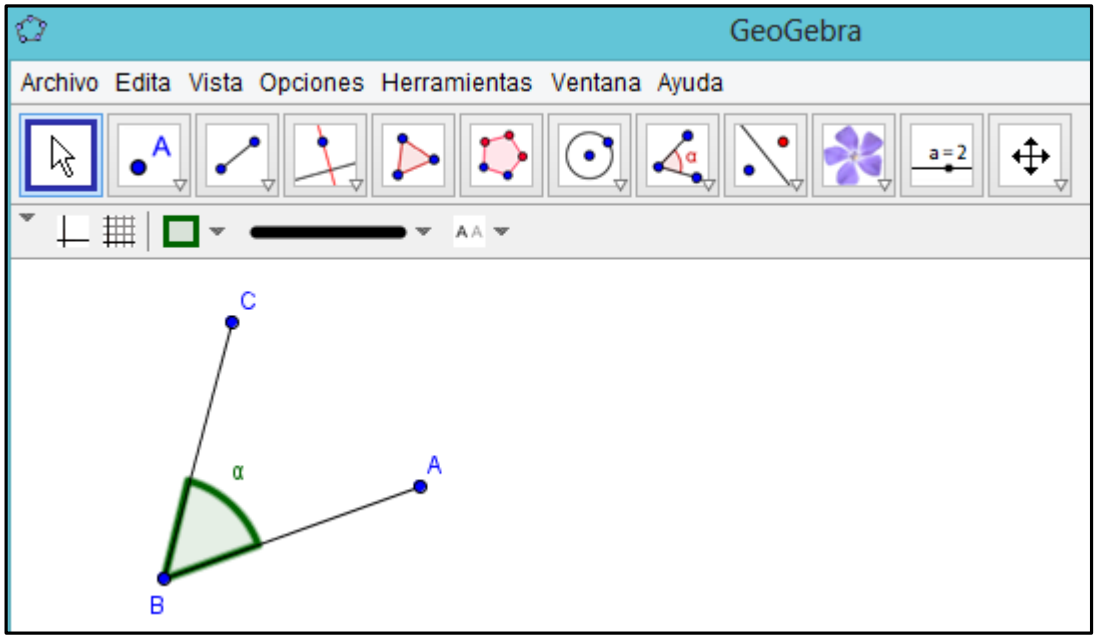


Figura 3.14. Un ángulo en geogebra.

El **punto medio** de un segmento de recta tiene la propiedad de que se encuentra a la misma distancia de sus extremos y divide al segmento en dos segmentos iguales.

Una manera de obtener el punto medio de un segmento es con el trazo de la recta llamada **mediatriz**. La mediatriz es una recta que corta o pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular al segmento. Además la mediatriz tiene la propiedad de que un punto cualquiera de la mediatriz, se encuentra a la misma distancia de los extremos del segmento, esto comúnmente se dice como que equidista de los extremos del segmento.

En la Figura 3.15, se obtiene la mediatriz del segmento AB, utilizando geogebra, para lo cual se localiza el puno C, a una distancia del punto A mayor a la mitad de la longitud del segmento. Se traza un círculo con centro A y radio AC. Con el mismo radio se traza un segundo círculo con centro en B. Los círculos se cortan en los

puntos D y E, con los cuales se traza la recta que pasa por ellos, que es la mediatriz DE, y cortando al segmento en el punto M, que es el punto medio del segmento AB.

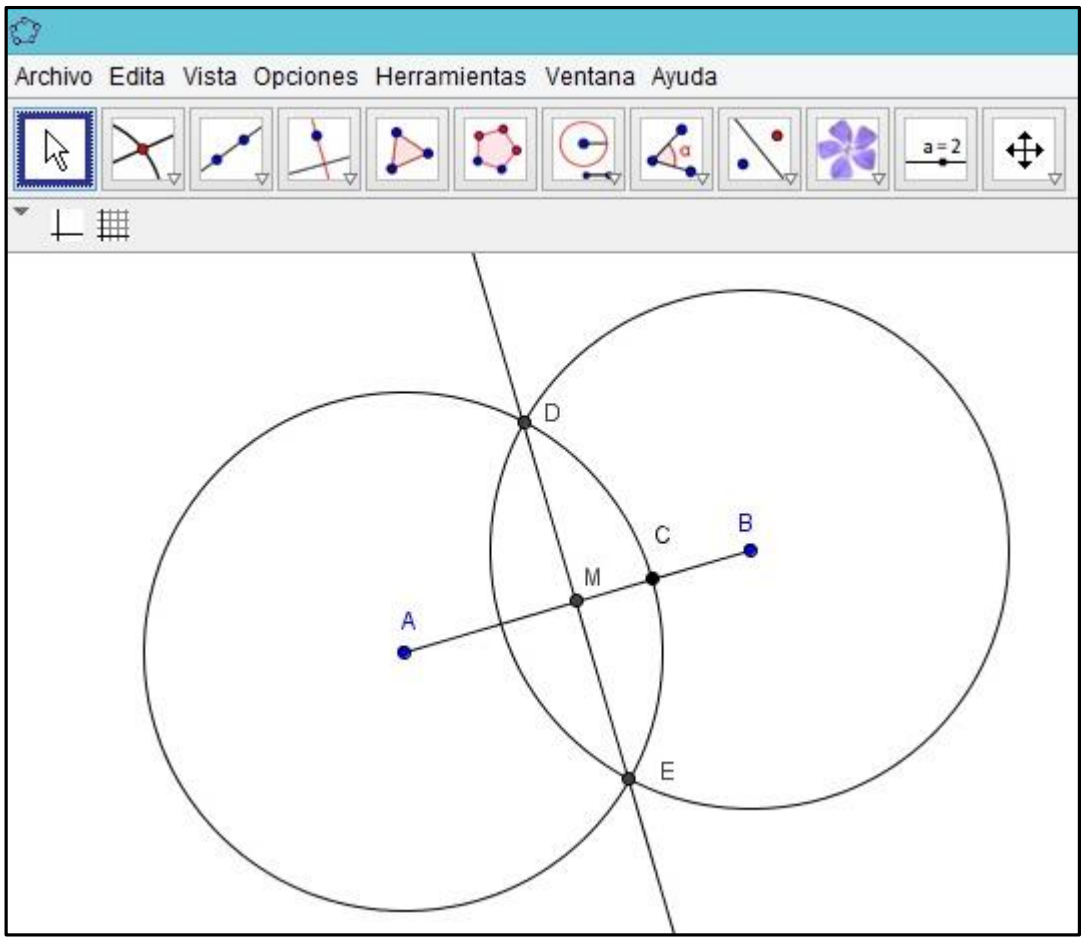


Figura 3.15. La mediatriz del segmento de recta AB en geogebra.

El comando mediatriz puede utilizarse directamente para trazar la mediatriz de un segmento dado, valga la redundancia, el cual se muestra en la Figura 3.16.

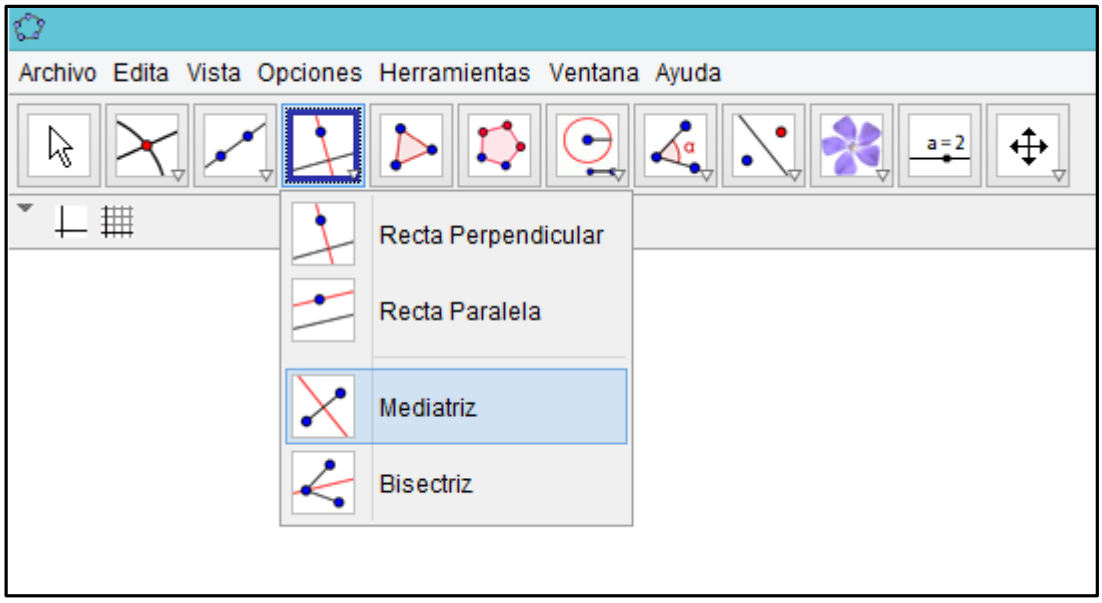
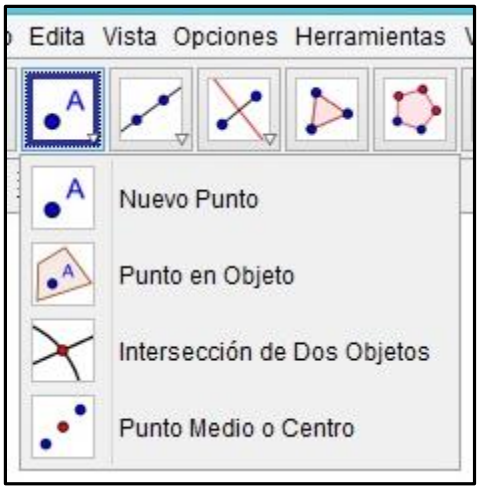


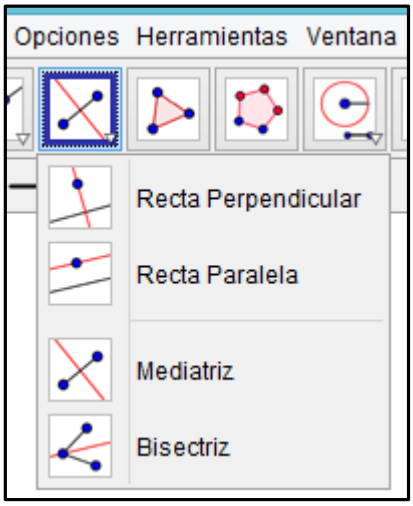
Figura 3.16. Comando para obtener la mediatriz de un segmento.

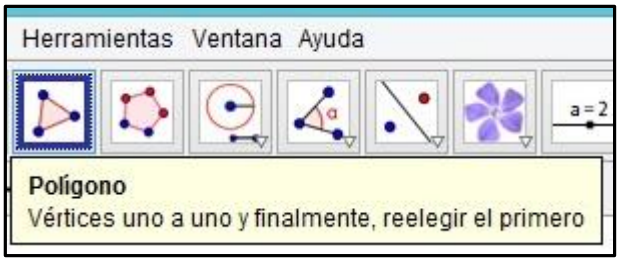
3.4 Comandos para geometría en geogebra

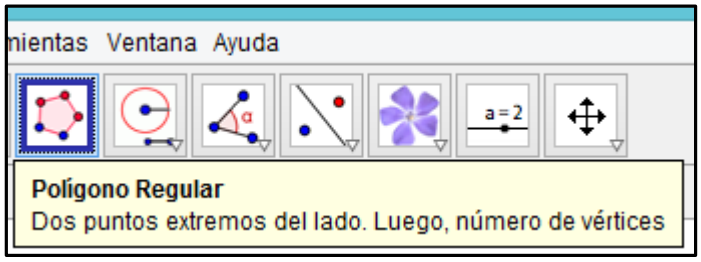
A continuación se muestra en imágenes la localización de los comandos más importantes para geometría en geogebra, y la descripción de uso dada por el software.

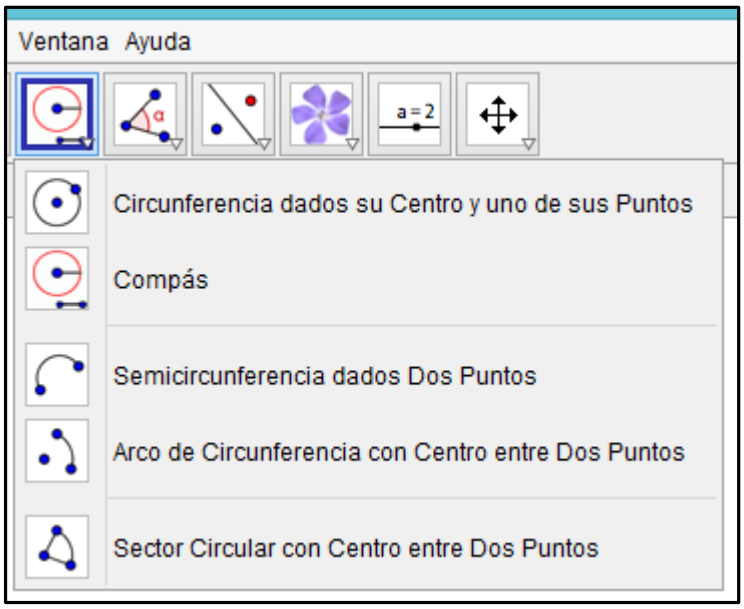

Edita Vista Opciones Herramientas
Nuevo Punto
Punto en Objeto
Intersección de Dos Objetos
Punto Medio o Centro

Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Recta que pasa por Dos Puntos
Segmento entre Dos Puntos
Segmento de Longitud Fija
Semirrecta que pasa por Dos Puntos
Poligonal

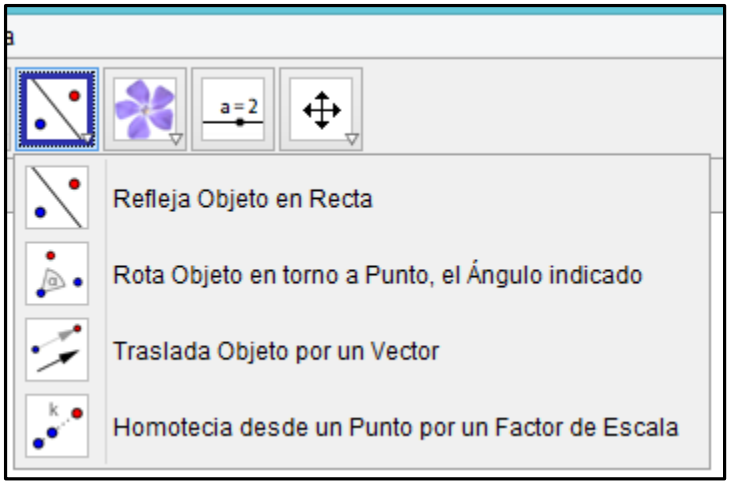

Opciones Herramientas Ventana
Recta Perpendicular
Recta Paralela
Mediatriz
Bisectriz

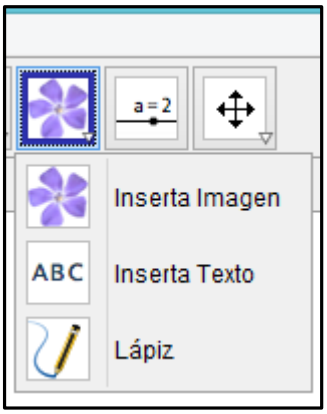

Herramientas Ventana Ayuda
a = 2
Polígono
Vértices uno a uno y finalmente, reelegir el primero

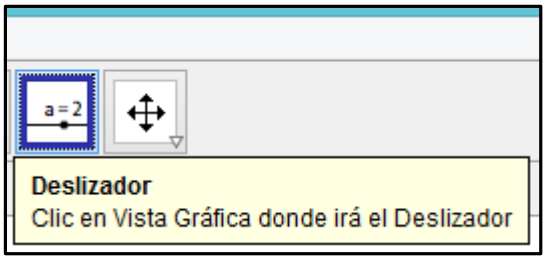

nientas Ventana Ayuda
a = 2
Polígono Regular
Dos puntos extremos del lado. Luego, número de vértices

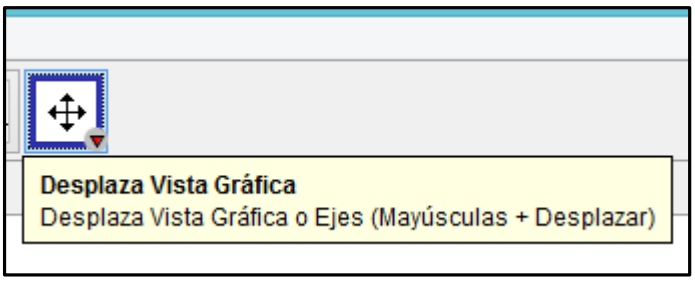

Ventana Ayuda
a = 2
Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos
Compás
Semicircunferencia dados Dos Puntos
Arco de Circunferencia con Centro entre Dos Puntos
Sector Circular con Centro entre Dos Puntos

a Ayuda
Ángulo
Ángulo dada su Amplitud
Distancia o Longitud
Área


Refleja Objeto en Recta
Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado
Traslada Objeto por un Vector
Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala


Inserta Imagen
Inserta Texto
Lápiz





Para el trazo de la mediatriz se utilizan los comandos segmento entre dos puntos, nuevo punto, compás, intersección de dos objetos, y recta que pasa por dos puntos.

Ejercicios

1. Reproduce el trazo de la mediatriz.

2. Mueve el punto A, utilizando el comando Elije y Mueve , para lo cual hay que arrastrar el punto manteniendo oprimido el clic derecho del ratón. Describe que es lo que sucede.

3. Mueve el punto B, utilizando el comando Elije y Mueve , para lo cual hay que arrastrar el punto manteniendo oprimido el clic derecho del ratón. Describe que es lo que sucede.

4. Mueve el punto C, utilizando el comando Elije y Mueve , para lo cual hay que arrastrar el punto manteniendo oprimido el clic derecho del ratón. Describe que

es lo que sucede. ¿Cuándo si se conserva la directriz?, ¿Cuándo desaparece o no se traza?

5. Mueve los punto D, E, M, utilizando el comando Elije y Mueve , para lo cual hay que arrastrar el punto manteniendo oprimido el clic derecho del ratón. Describe que es lo que sucede.

6. ¿Por qué no se pueden mover los puntos D, E y M?

3.5 Rectas paralelas y perpendiculares

Se dice que dos rectas son **paralelas** si no se cortan o cruzan, o no se intersecan o intersecan. Considera unas vías de un tren, nos dan idea de lo que son rectas paralelas, los rieles no se deben cruzar, porque si no el tren no podría moverse por la vía (ver Figura 3.17)

Figura 3.17. Unas vías se pueden ver como rectas paralelas.

En un trazo con regla y compás o usando geogebra, las rectas se pueden ver como las de la Figura 3.18:

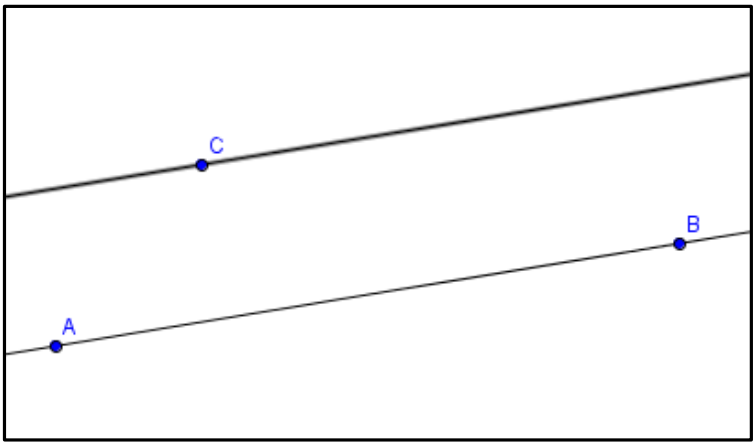


Figura 3.18. Rectas paralelas.

Dos rectas son **perpendiculares** si al cortarse forman ángulos adyacentes iguales, entendiendo por **ángulos adyacentes** aquellos que comparten el vértice y un lado. En la Figuras 3.19 y 3.20, respectivamente, se pueden observar ángulos adyacentes y rectas perpendiculares.

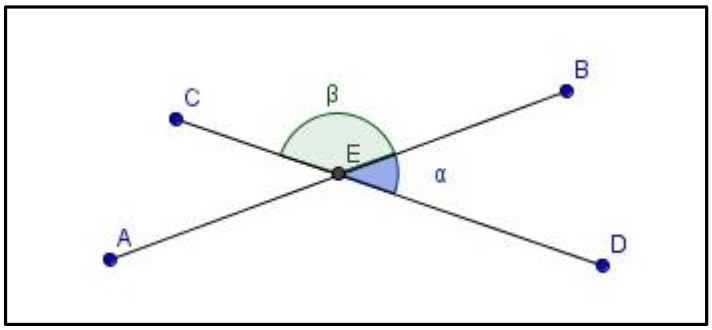


Figura 3.19. Ángulos adyacentes α, β.

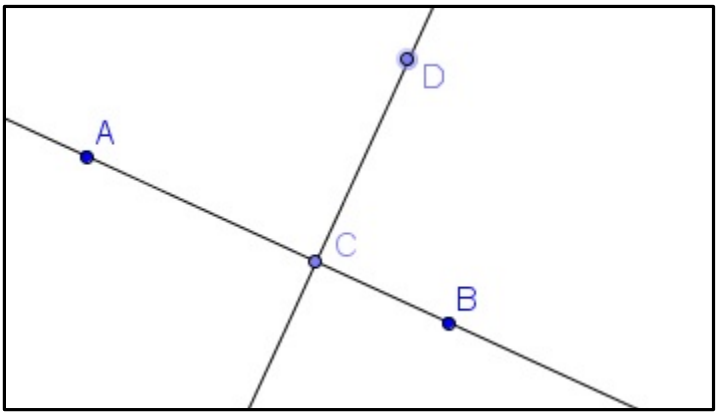


Figura 3.20. Rectas perpendiculares.

En la Figura 3.20, las rectas AB y CD son perpendiculares, pues $\angle \boldsymbol{ACB} = \angle \boldsymbol{BCD}$.

El concepto de perpendicularidad se expresa en la naturaleza de manera aproximada por árboles que crecen “derechos” con respecto al suelo horizontal, o a un plano horizontal imaginario cuando el suelo forma una colina, la trayectoria que sigue un objeto que cae al suelo, o en la actualidad a postes, edificios que son perpendiculares al suelo. En la Figura 3.21 se tiene un arbolo perpendicular a una recta imaginara horizontal sobre el suelo, que en realidad son una infinidad.

Figura 3.21. Un árbol idealmente es perpendicular al suelo.

En la Figura 3.22, se desea trazar una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y que pasa por el punto C, que esta fuera de AB. La mediatriz es un trazo fundamental, que nos sirve para trazar perpendiculares y paralelas

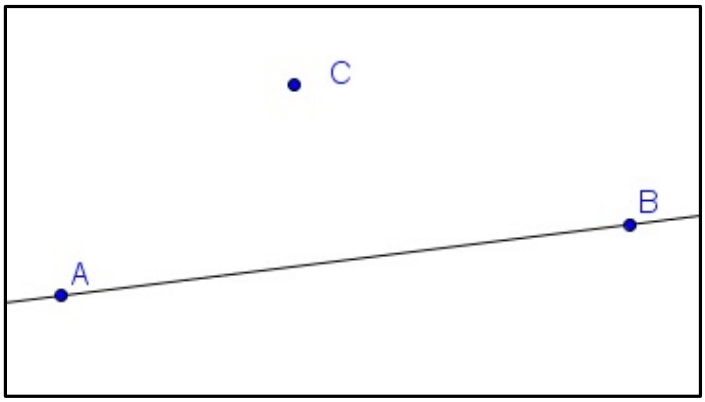


Figura 3.22. Se quiere trazar una recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el punto C.

En la Figura 3.23 se traza la perpendicular deseada, con la siguiente secuencia de trazos.

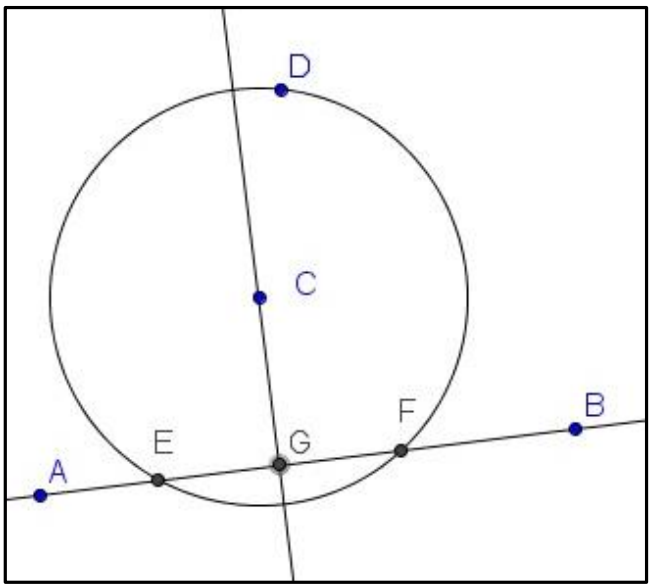


Figura 3.23.La recta $\overleftrightarrow{CG}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$y pasa por el punto C.

☞ Secuencia de trazos:

1. Dibujar un círculo con centro en C y que corte en dos puntos a $\overleftrightarrow{AB}$. Los puntos de corte son E y F.
2. Se traza la mediatriz a $\overline{EF}$, la cual pasa por C y G, y esa es la perpendicular buscada, la recta $\overleftrightarrow{CG}$.

Ejercicios

1. Trazar la perpendicular a AB, que pase por C, pero C estando en la recta AB.
2. Trazar la paralela a AB que pase por C, obviamente, estando C fuera de AB.
3. Dado el triángulo ABC, trazar una paralela al lado AB que pase por el vértice C.
4. Una altura del lado de un triángulo, es la recta que pasa por el vértice opuesto y es perpendicular al lado, o a su prolongación. En el Δ ABC (triángulo con vértices A, B, C), trazar las altura de los lados del triángulo, AB, BC y AC, utilizando geogebra o regla y compás.

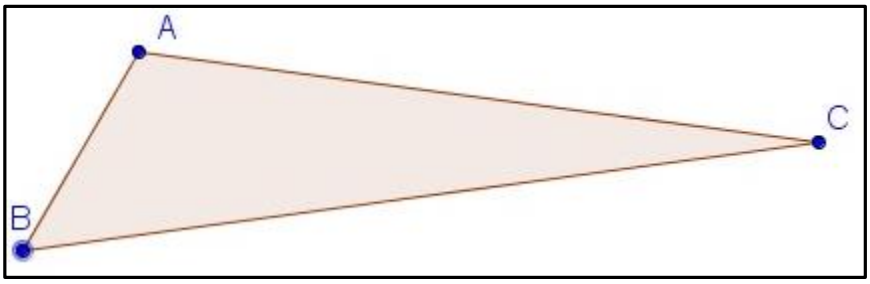


Figura 3.23a. Problema 4.

3.6 Bisectriz y clasificación de ángulos por su apertura

Cuando se tiene un ángulo, se puede dividir en dos ángulos iguales, así como dado un segmento se puede dividir en dos segmentos del mismo tamaño, por el punto medio, que se puede determinar por la mediatriz. La recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales es la **bisectriz**.

A continuación se da la secuencia de trazos para trazar la bisectriz del $\angle \boldsymbol{ABC}$, utilizando geogebra, sin dejar de considerar que todo lo que se haga estáticamente con geogebra se puede hacer con regla y compás, solo que cuando se utiliza regla y compás. Cuando se usa compás muchas veces solo se requiere del arco de una circunferencia, no de toda la circunferencia.

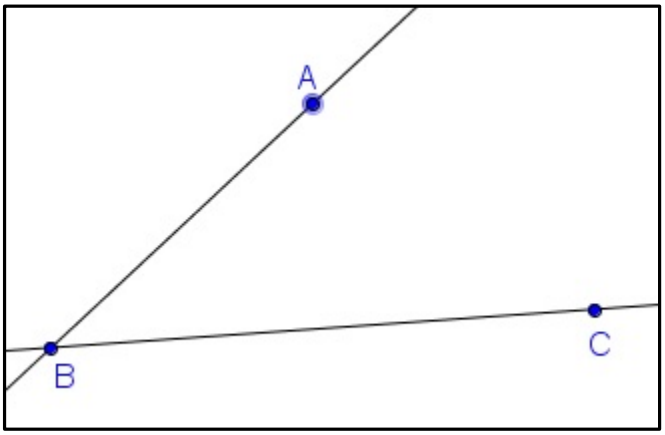


Figura 3.24. Se quiere trazar la bisectriz del $\angle \boldsymbol{ABC}$.

En la Figura 3.25 se observa el trazo de la bisectriz del $\angle \boldsymbol{ABC}$ con geogebra.

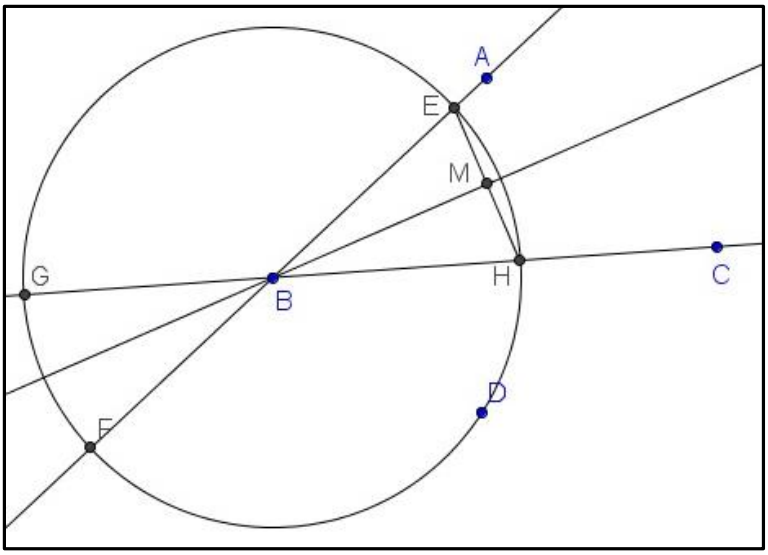


Figura 3.25. Trazo de la bisectriz del $\angle ABC$.

☞ Secuencia de trazos:

1. Dibujar la circunferencia con centro en B y con cualquier radio.
2. Se localizan los puntos de intersección, E y H, de la circunferencia con los lados del ángulo.
3. Se traza la mediatriz del segmento EM, que pasará por el vértice del ángulo dado y ésta será la bisectriz buscada.

La medida de ángulos se hace necesaria cuando queremos tratar a los ángulos complementarios y sus análogos. Un ángulo de una vuelta completa se divide en 360 partes iguales, cada una de esa partes nos da 360 ángulos que miden un grado (1º) cada uno de ellos, de ésta manera tenemos nuestra primera unidad de ángulos, el grado. Tenemos ahora un grado como unidad de medida en un sistema en el sistema sexagesimal (base 60), porque ahora un ángulo de un grado se divide en 60 partes iguales y tenemos 60 ángulos de un minuto (1'), un ángulo de 1' se divide en 60 partes iguales y tenemos 60 ángulos donde cada uno mide un segundo (1''). Si tenemos un ángulo que escrito como 53º 12' 43'', entenderemos que mide 53 grados, 12 minutos y 43 segundos.

Un ángulo llano es la mitad de un ángulo de una vuelta completa, es decir que medirá 180º, el ángulo de una vuelta completa medirá 360º. Un ángulo recto de acuerdo a su definición, será la mitad de un ángulo llano, es decir 90º. Los tre ángulos se muestran en la Figura 3.26.

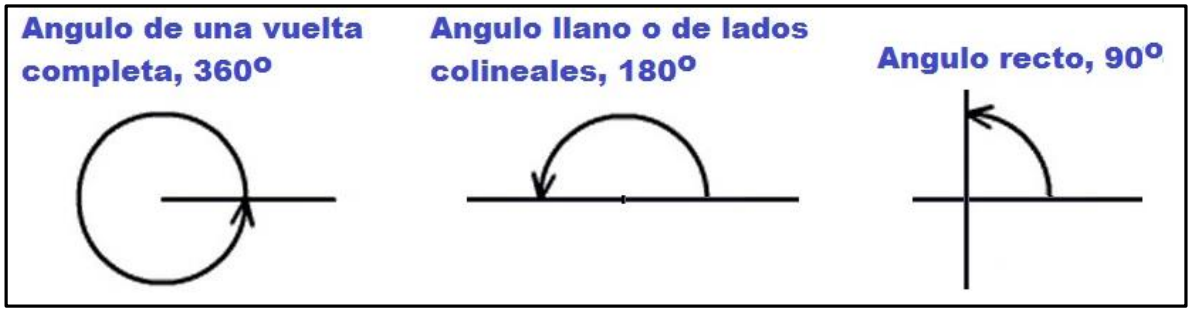


Figura 3.26. Ángulos de una vuelta completa, llano y recto.

Un **ángulo agudo** es aquel que mide menos que un recto (90º), un **ángulo obtuso** es el que mide más que un llano (180º). En la Figura 3.27 se muestran un ángulo agudo y un ángulo obtuso, respectivamente.

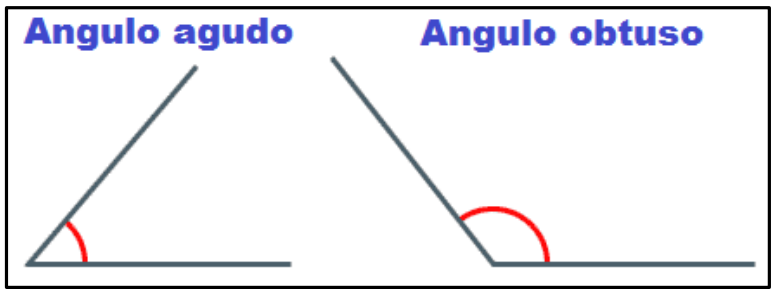


Figura 3.27. Ángulos agudo y obtuso.

Decimos que dos ángulos son complementarios si suman un recto (90º). Si α y β son ángulos complementarios, α + β = 180º, y se dice que α es el complemento de β o β es el complemento de α.

El complemento de 60º es 30º, o el complemento de 30º es 60º. Para obtener el complemento de un ángulo simplemente a 90º se le resta el ángulo dado. El complemento de 46º 34’ 56’’, se obtiene con la resta:

$$\begin{array}{rrrr} & 89^{o} & 59' & 60'' \\ - & 46^{o} & 34' & 56'' \\ \hline & 43^{o} & 25' & 4'' \end{array}$$

En la cual, hay que escribir también 90º en minutos y segundos, para que se pueda efectuar la operación, considerando que 90º = 89º + 1º = 89º + 59’ +1’= 89º + 59’ +60’’, lo cual se acostumbra escribir como simplemente 89º + 59’ +60’’.

De la misma manera, se definen dos ángulos suplementarios, cuando suman un llano, es decir 180º. Para 120º su suplemento es 60º o 60º es el suplemento de 120º. Para obtener el suplemento de un ángulo simplemente a 180º se le resta el ángulo dado.

Antes de determinar ésta parte, no hay que olvidar que dos ángulos son **opuestos por el vértice** si tienen el mismo vértice y los lados de uno de los ángulos son la prolongación de los lados del otro ángulo.

En la Figura 3.28 presentan dos ángulos opuestos por el vértice.

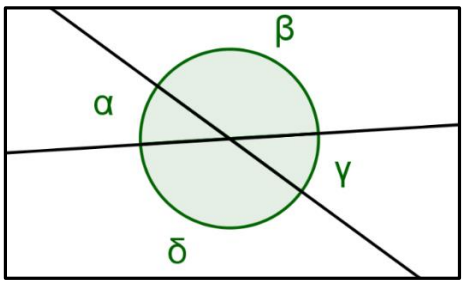


Figura 3.28. Ángulos opuestos por el vértice, α con γ, β con δ.

Ejercicios

1. Dibujar tres ángulos cualquiera y obtener sus bisectrices sin utilizar el comando bisectriz.

2. Sin utilizar la mediatriz, encontrar otra secuencia de trazos para hacer la construcción de una bisectriz.

3. Obtener los complementos de los siguientes ángulos:

a) 34º 26’

b) 57º

c) 78º 17’’

d) 26º 37’ 26’’

4. Obtener los suplementos de los ángulos de los cuatro apartados del ejercicio 3.

5. Obtener los suplementos de los siguientes ángulos:

a) 123º 34’ 47’’

b) 146º 89´ 126’’

c) 109º 12’’

d) 126º 50’

4. Demuestre que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

5. En el trazo de la bisectriz de un ángulo con geogebra, mueva todos los puntos de la construcción y observe que cambios hay, y que invariantes se encuentran.

3.7 Tipos de ángulos que se forman entre dos rectas paralelas

Cuando se tienen dos rectas que se cortan, o se intersecan; se utilizan esos términos para mencionar ese hecho, se forman varios ángulos, que se muestran en la Figura 3.29, cuando esas rectas son cortadas por otra recta. Esa recta se acostumbra llamarla transversal.

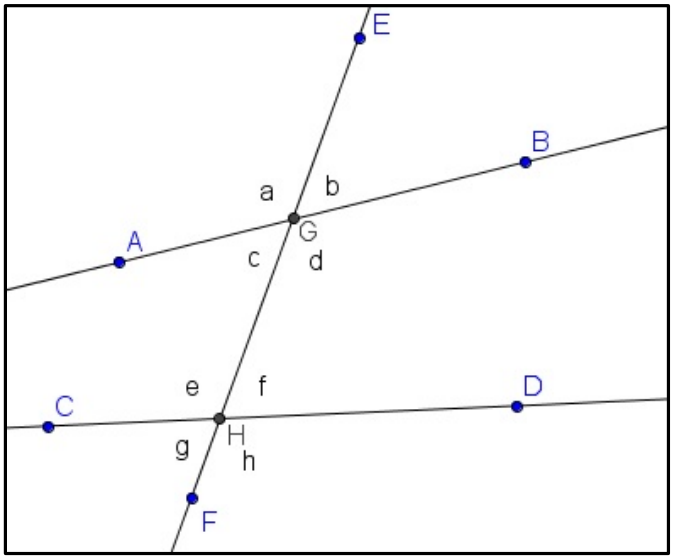


Figura 3.29. Ángulos formados por dos rectas que se cortan y una transversal.

Las rectas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$, son cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{EF}$, formando los siguientes pares de ángulos conocidos como se indica en la Tabla 3.1

Tipo de ángulos	Pares de ángulos
Alternos internos	c, f e, d
Alternos externos	a, h g, b
Correspondientes	a, e c, g b, f d, h

Tabla 3.1. Ángulos formados por dos rectas que se cortan y una transversal.

Cuando rectas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ son paralelas, las parejas de ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes son iguales, como se muestra en la Figura 3.30 y en la Tabla 3.2.

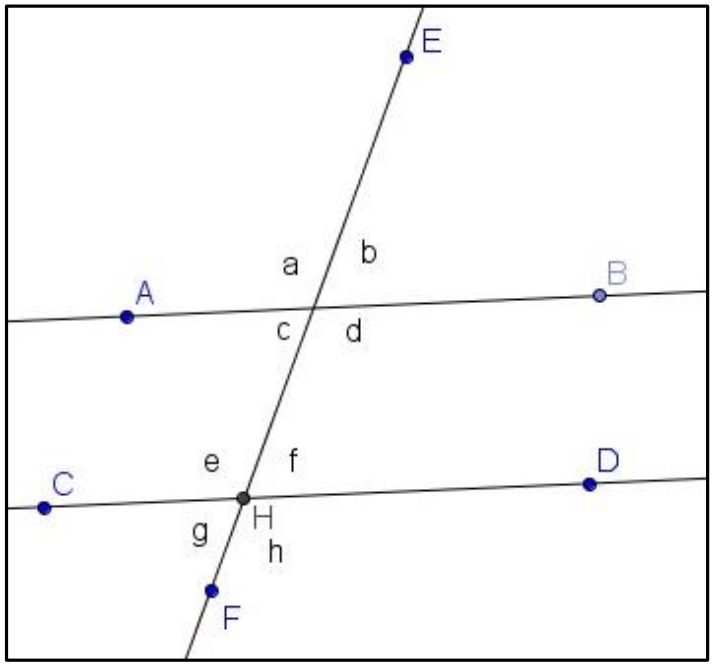


Figura 3.30. Ángulos formados por dos rectas paralelas que se cortan y una transversal.

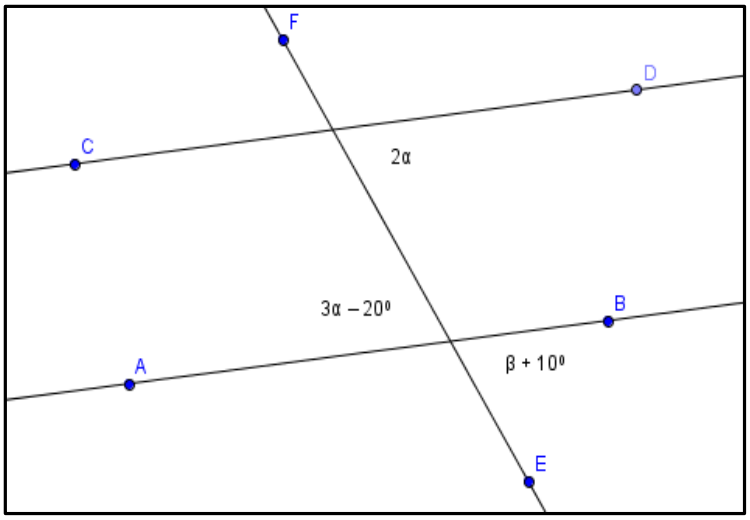
Tipo de ángulos	Pares de ángulos
Alternos internos	c = f e = d
Alternos externos	a= h g = b
Correspondientes	a = e c = g b = f d = h

Tabla 3.2 Ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal.

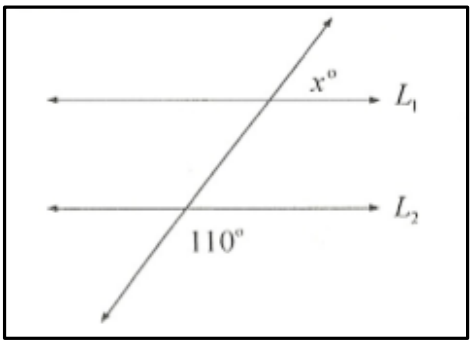
Ejercicios

1. Si consideramos la Figura 3.30, donde a = 120º, determine los siete ángulos restantes.

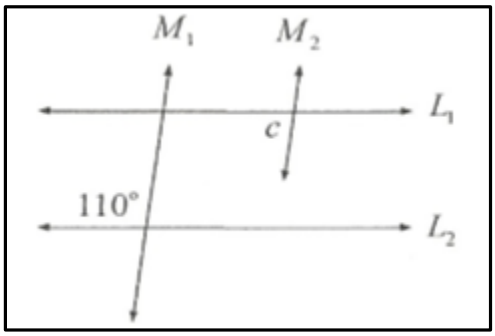
2. En la siguiente Figura, si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, calcular α + β.



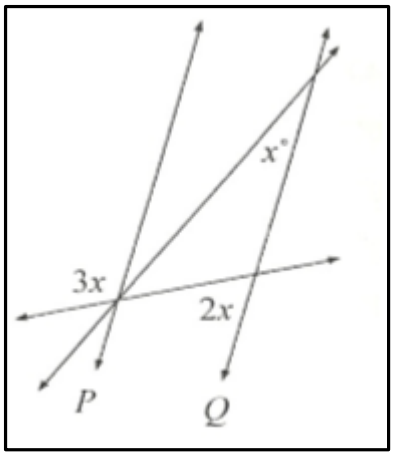
3 En la siguiente Figura, si $L_1 \parallel L_2$, $x=?$



4. En la siguiente Figura, si $\mathbf{L_1 \| L_2, M_1 \| M_2, \; ¿c = ?}$



5. En la figura, $\mathbf{P \| Q, \; x = ?}$



3.8 Clasificación de triángulos

Los triángulos son figuras básicas en el estudio de la geometría, es decir, el resto de figuras se pueden construir a partir del triángulo, que combinado con la circunferencia pueden generar un sin fin de formas geométricas.

Podemos clasificar a los triángulos según sus lados. Un triángulo es escaleno si tiene sus tres lados diferentes, equilátero si tiene sus tres lados iguales, e isósceles si tiene dos lados iguales (Ver Figura 3.31).

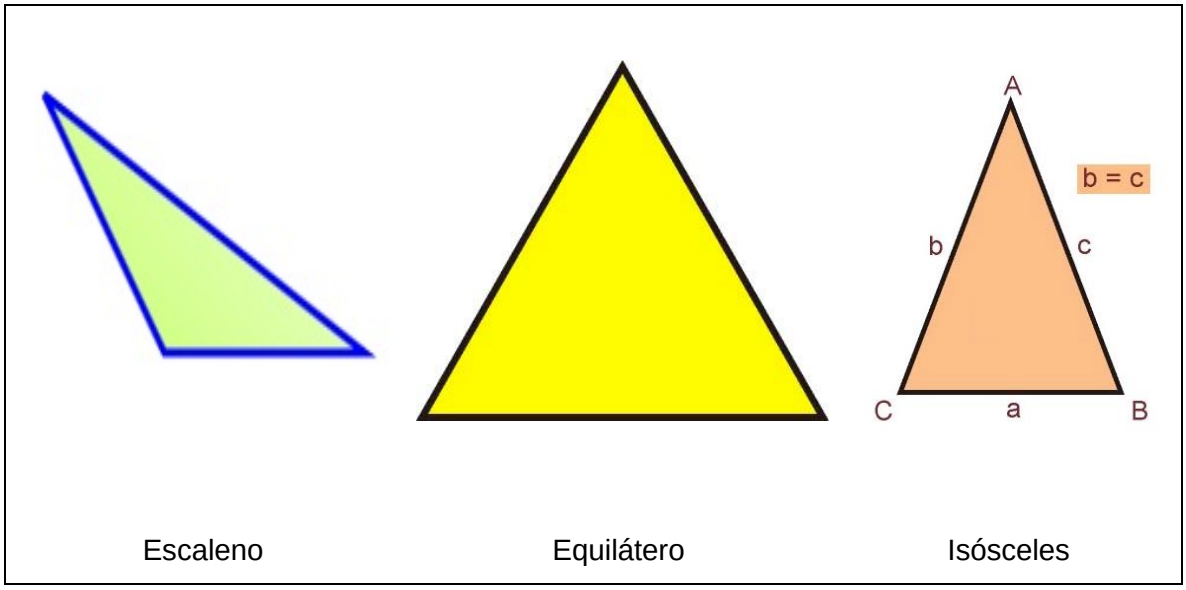


Figura 3.31. Clasificación de triángulos según sus lados.

También podemos clasificar a los triángulos según sus ángulos. Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto, es decir de 90º, un triángulo es acutángulo si sus tres ángulos son agudos, y es obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso, mayor de 90º. También un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales, los opuestos a los lados iguales, además un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales, y también se dice ser un triángulo equiángulo (Ver Figura 3.32).

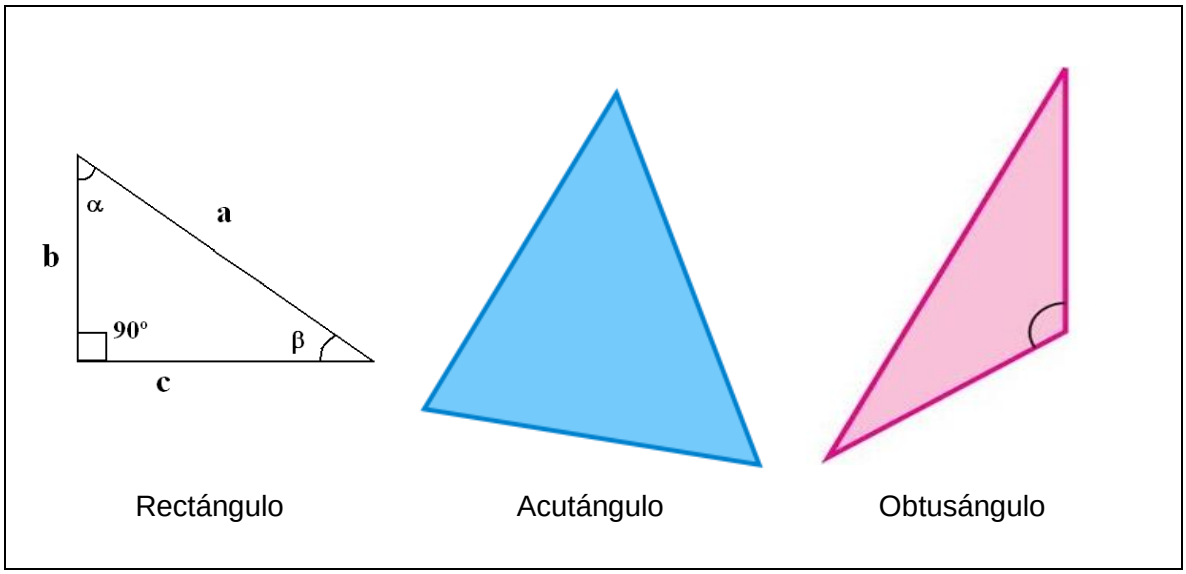
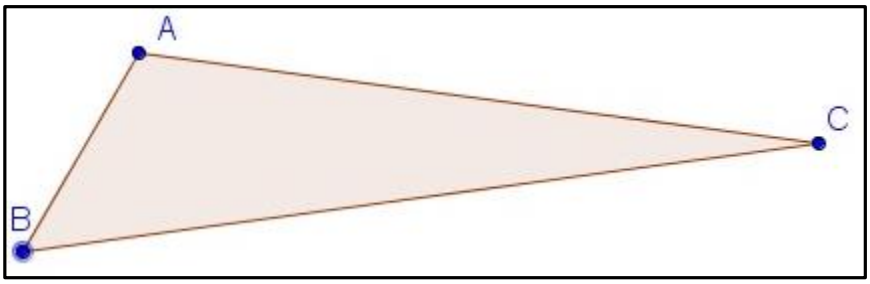


Figura 3.32. Clasificación de triángulos según sus ángulos.

Ejercicios

Cuando tenemos un triángulo, se puede decir mucho de ésta figura tan simple. Algo que podemos decir lo trataremos de obtener, mediante el método de inducción, es decir, veremos ciertos casos particulares y después trataremos de dar un resultado general, que se cumple siempre, y el cual debe ser sometido a una demostración matemática, sin dejar de vista que nuestro principal objetivo es formularlo.

Consideremos el triángulo como el de la siguiente Figura, en la que se dan las longitudes de los lados.



Lado	Longitud
AB	2.29
BC	6.86
AC	8.03

1. Compararemos la longitud de cada lado con la suma de las longitudes de los otros dos lados. En las siguientes tablas hay llenar la información faltante, y al hacer comparaciones recordar los significados < (menor), > (mayor), o = (igual).

Lados que se suman	Resultado de la suma
BC + AC	
AB + AC	10.32
AB + BC	

2. Completar con el símbolo de comparación correcto.

Lado	Símbolo de comparación	Suma de los otros lados
AB		BC + AC
BC	<	AB + AC
AC		AB + BC

3. Repite el proceso con más triángulos.

4. Con lo anterior, podemos conjeturar que en todo triángulo, cada lado es _____ que la suma de los otros lados. Esta afirmación se conoce como la desigualdad del triángulo.

5. Explica en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.

3.9 Suma de los ángulos interiores de un triángulo

Una de las características de la geometría es que mediante una secuencia de deducciones se pueden establecer resultados, o enunciados que son verdaderos siempre.

Al observar y calcular lo que suman los ángulos interiores de un triángulo, se puede establecer que su suma siempre es de 180º, para todo triángulo, es decir de la infinidad de triángulos que se pueden construir, para cada uno de ellos, la suma de sus ángulos interiores es 180º.

Una demostración es una cadena de deducciones, obtención de afirmaciones justificadas, en donde la última es la afirmación deseada o tesis, cuando se supone que se cumple una afirmación o también llamada hipótesis.

La afirmación o proposición de que la suma de los ángulos interiores es 180º, se puede demostrar así. Consideremos el triángulo de la figura 3.29.

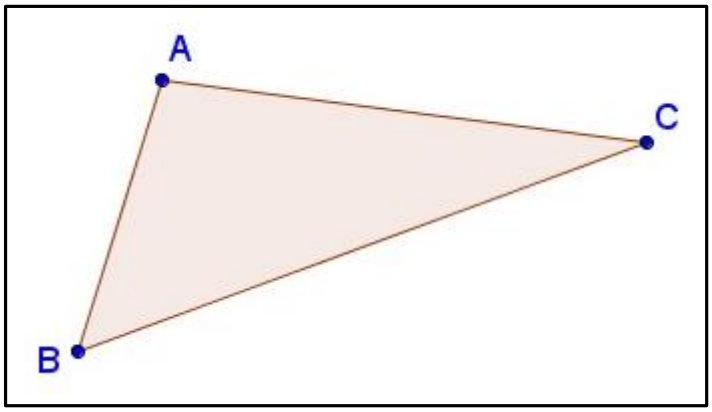


Figura 3.33. Triángulo usado para demostrar la suma de los ángulos interiores.

Trazamos una paralela DE al lado BC, que pase por el vértice A, (ver Figura 3.34).

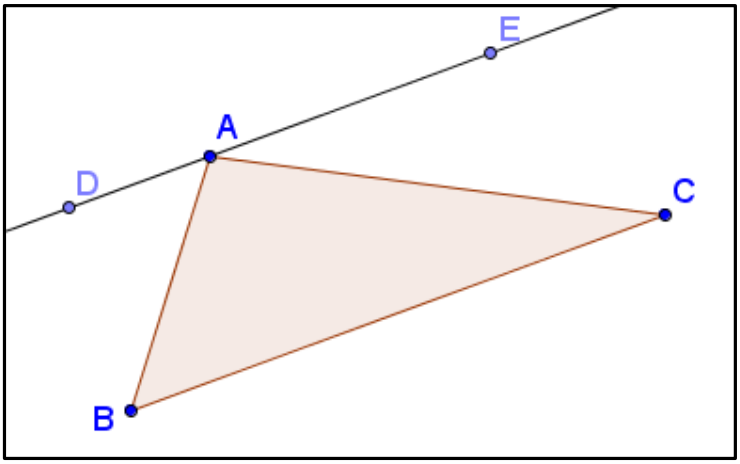


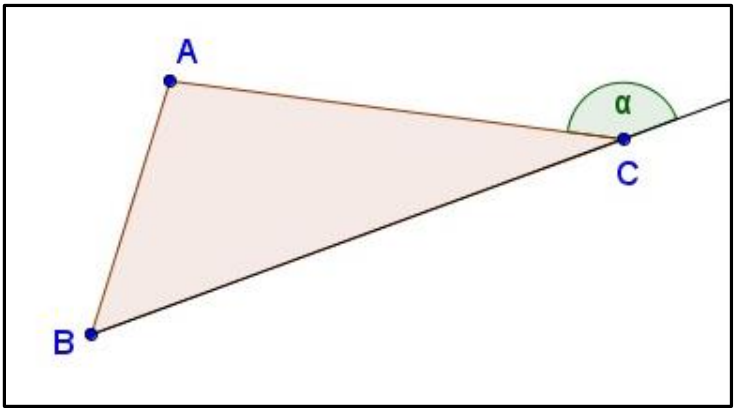
Figura 3.34. Figura para demostrar que la suma de los ángulos interiores es 180º.

Podemos afirmar lo siguiente:

1. La suma de los ángulos $\measuredangle \boldsymbol{DAB} + \measuredangle \boldsymbol{BAC} + \measuredangle \boldsymbol{CAE} = \boldsymbol{180^o}$**,** porque ocurre que $\measuredangle \boldsymbol{DAB} + \measuredangle \boldsymbol{BAC} = \measuredangle \boldsymbol{DAC}\ y\ \measuredangle \boldsymbol{DAC}\ y\ \measuredangle \boldsymbol{CAE}$, son suplementarios.
2. $\measuredangle \boldsymbol{DAB} = \measuredangle \boldsymbol{ABC}$, por ser alternos internos con respecto a la transversal $\overleftrightarrow{AB}$.
3. $\measuredangle \boldsymbol{CAE} = \measuredangle \boldsymbol{BAC}$, por ser alternos internos con respecto a la transversal $\overleftrightarrow{AC}$.
4. $\measuredangle \boldsymbol{ABC} + \measuredangle \boldsymbol{BAC} + \measuredangle \boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{180^o}$, sustituyendo las igualdades dadas en las afirmaciones 2 y 3, en la igualdad de la afirmación 1.

Ejercicios

1. Un ángulo exterior de un triángulo con respecto a un vértice, se construye prolongando un lado, como el ángulo α, de la siguiente Figura:



En éste caso se prolongó el lado BC, ¿Cómo es el ángulo exterior con respecto a α si ahora se prolonga el lado AC?

2. Argumenta por qué un ángulo exterior es la suma de los dos interiores no adyacentes. Sugerencia. Traza una paralela a un lado que pase por el vértice que sobra. Para la figura del problema 1, habría que trazar una paralela al lado AB, que pase por C, y comprobar que $\alpha = \measuredangle A + \measuredangle B$.

3. Argumenta por qué la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360º. Sugerencia: utilizar que un ánulo exterior es la suma de los dos interiores no adyacentes.

3.10 Rectas notables de un triángulo.

Situándonos en un triángulo, le podemos trazar las mediatrices a cada lado, las bisectrices de cada ángulo, las alturas de cada lado, y las medianas de cada lado, es decir, las rectas que unen el punto medio del lado con el vértice opuesto. Estas rectas, se conocen comúnmente como las rectas notables del triángulo, por sus propiedades impresionantes, que surgen de una figura muy simple, como lo es el triángulo.

La mediana del lado de un triángulo es una recta que se construye localizando el punto medio del lado y uniendo el vértice opuesto a ese lado con el punto medio se obtiene la mediana correspondiente.

Las tres medianas del triángulo concurren (se cruzan en un solo punto), y ese punto se llama baricentro y se muestran en la Figura 3.35.

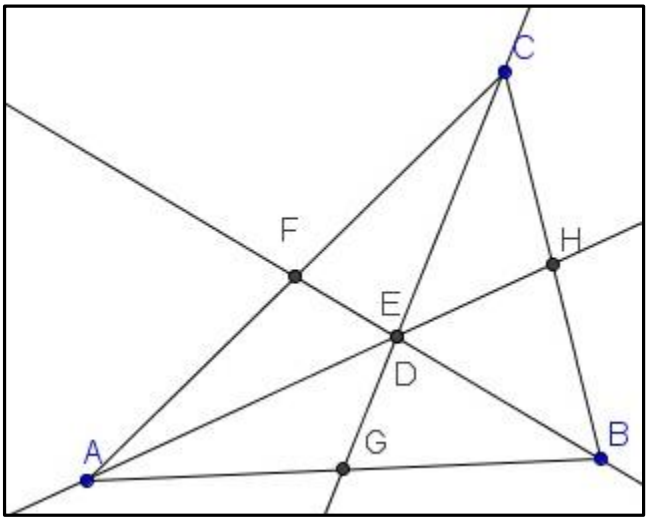


Figura 3.35. Las medianas son concurrentes, el punto E es igual al D, el cual se conoce como baricentro.

Se puede hacer el trazo de las medianas con regla y compás. O usando geogebra, con el protocolo o secuencia de trazos siguiente se puede obtener el baricentro de un triángulo.

☞ Secuencia de trazos:

1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento a	Segmento [A, B]
4	Punto C	
5	Segmento b	Segmento [B, C]
6	Segmento c	Segmento [C, A]
7	Recta d	Mediatriz A, C
8	Recta e	Mediatriz A, B

9	Recta f	Mediatriz B, C
10	Recta g	Recta que pasa por C perpendicular a A
11	Punto F	Punto Medio de A, C
12	Punto G	Punto Medio de A, B
13	Punto H	Punto Medio de C, B
14	Recta i	Recta que pasa por F, B
15	Recta j	Recta que pasa por H, A
16	Recta k	Recta que pasa por G, C
17	Punto D	Punto de intersección de k, i
18	Punto E	Punto de intersección de j, k.

El baricentro siempre está en el interior del triángulo. Esto lo podemos argumentar pensando al conjunto que determina el triángulo como un conjunto convexo, es decir, un conjunto que contiene en su interior a todos los segmentos que se puedan construir si se toman dos puntos en el interior del triángulo. Como el segmento de cada mediana del vértice al punto medio está en el interior, esto nos lleva a que el baricentro debe estar en el interior del triángulo.

Las mediatrices del triángulo se muestran en la Figura 3.36, así como el circuncentro D, que es el centro del círculo que contiene a los tres vértices del triángulo dado. Hay que recordar, que la mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el punto medio, es perpendicular al segmento, y todos los puntos de la mediatriz se encuentran a la misma distancia (equidistan), de los extremos del segmento. Para el caso de un triángulo, el segmento es un lado. Las tres medianas se intersectan en un punto llamado circuncentro, que a la vez es el centro del circulo que pasa por los tres vértices del triángulo, es decir queda fuera del triángulo.

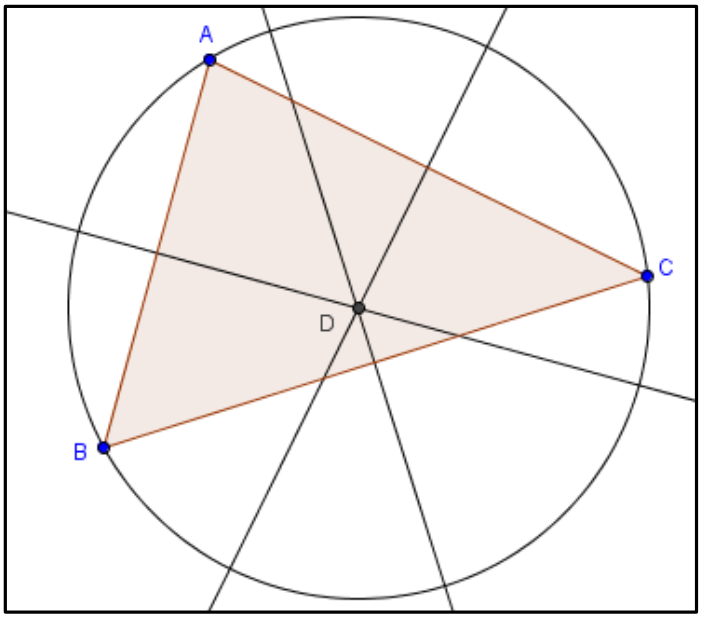


Figura 3.36. Las mediatrices, el circuncentro D, y el circulo circunscrito con centro D y radio DA.

☞ Secuencia de trazos:

1	Punto A	
2	Punto B	
3	Punto C	
4	Triángulo polígono1.	Polígono A, B, C
4	Segmento c.	Segmento [A, B] de Triángulo polígono1
4	Segmento a.	Segmento [B, C] de Triángulo polígono1
4	Segmento b.	Segmento [C, A] de Triángulo polígono1
5	Recta d.	Mediatriz B, A
6	Recta e.	Mediatriz A, C
7	Recta f.	Mediatriz C, B
8	Punto D.	Punto de intersección de f, d
9	Circunferencia g.	Circunferencia que pasa por A con centro D.

La altura del lado de un triángulo es la recta que es perpendicular al lado y pasa por el vértice opuesto. Puede quedar dentro o fuera del triángulo, es decir, en lugar de cortar al lado, lo corta en su prolongación. Las tres altura de un triángulo se cortan

en un solo punto llamado el ortocentro. Las alturas del triángulo se muestran en la Figura 3.37, junto con su ortocentro; observar que en este caso, dos de las alturas son perpendiculares a la prolongación de dos lados.

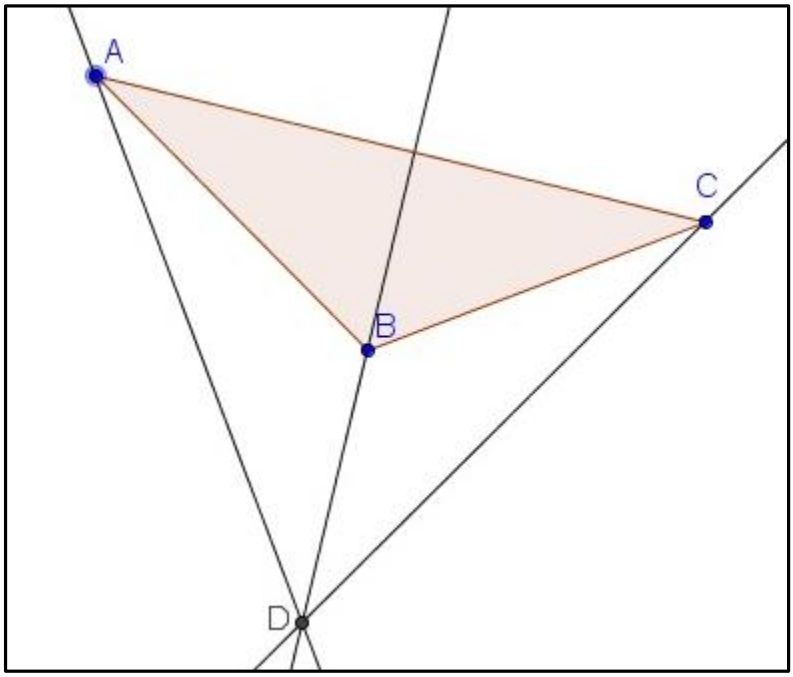


Figura 3.37. Las alturas y el ortocentro D.

La bisectriz es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales, pasa por el vértice del ángulo, además, cada punto de la bisectriz es el centro de una circunferencia que es tangente a los lados del ángulo. Entendemos por una recta tangente a una circunferencia a aquella que toca a la circunferencia en un solo punto, Figura 3.38.

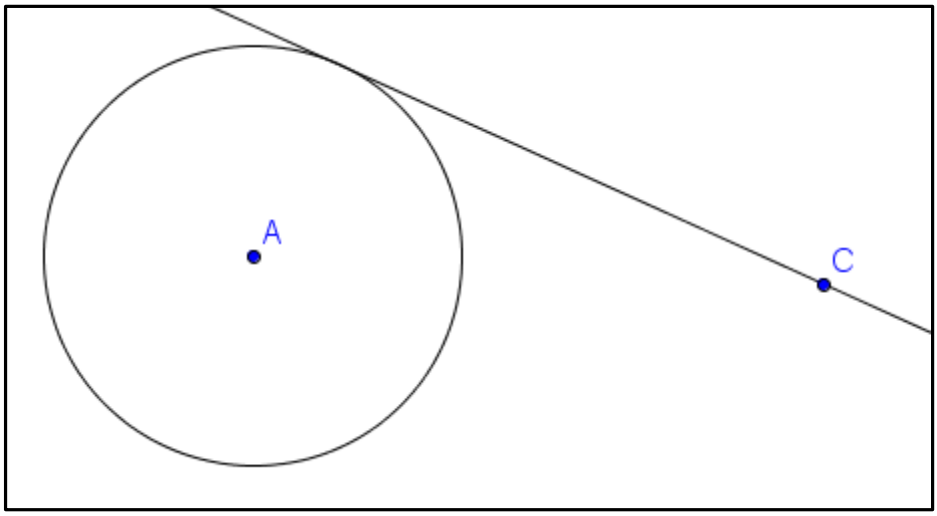


Figura 3.38. Tangente a una circunferencia desde un punto C.

Los griegos originalmente consideraron a un lugar geométrico como la trayectoria que sigue un punto, sin considerar la definición actual que se refiere a un conjunto de puntos del plano con cierta propiedad. Por ejemplo, la bisectriz de ángulo es el lugar geométrico de un punto que sigue una trayectoria tal que equidista de las dos semirectas que forman al ángulo. Después de proceder a la inversa, es decir utilizamos el método analítico sintético, suponiendo que ya tenemos la bisectriz, y vemos que en realidad lo que tenemos que trazar es una mediatriz, que será la bisectriz buscada, es decir, la mediatriz es uno de los trazos básicos de la geometría, trazo en el que están apoyadas muchas construcciones. Tenemos la bisectriz, en la Figura 3.39.

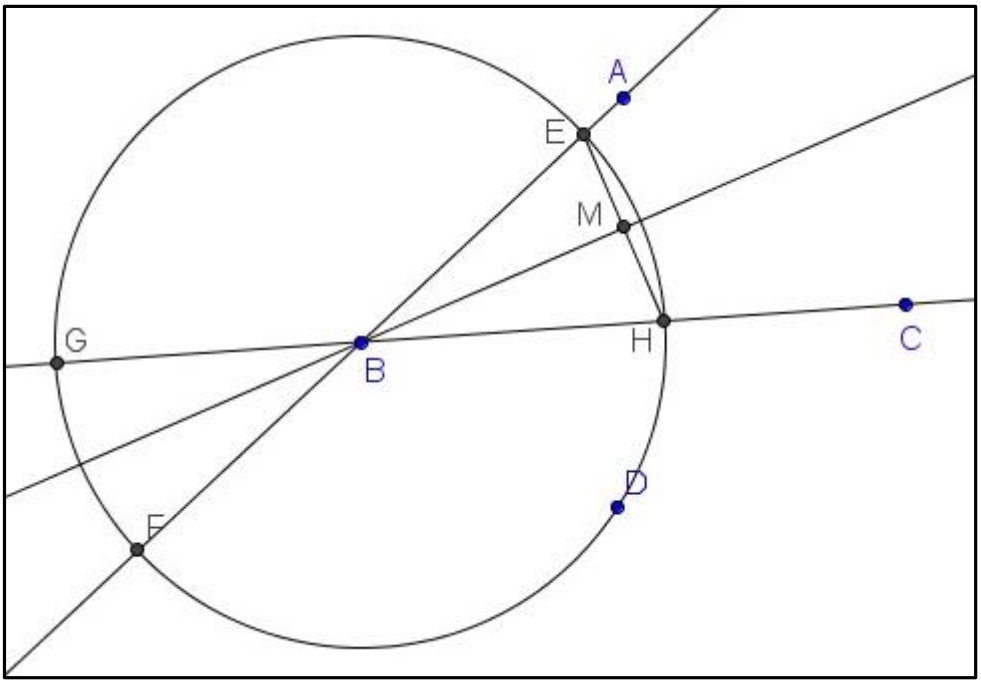


Figura 3.39. Bisectriz BM de un ángulo.

☞ Secuencia de trazos:

1	Punto A	
2	Punto B	
3	Recta a	Recta que pasa por A, B
4	Punto C	
5	Recta b	Recta que pasa por B, C
6	Punto D	
7	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por D con centro B
8	Punto E	Punto de intersección de c, a
8	Punto F	Punto de intersección de c, a
9	Punto G	Punto de intersección de c, b
9	Punto H	Punto de intersección de c, b
10	Segmento d	Segmento [H, E]
11	Recta e	Mediatriz H, E
12	Punto M	Punto de intersección de e, d.

Si regresamos al concepto de ver a la bisectriz como un lugar geométrico (ver Figura 3.40):

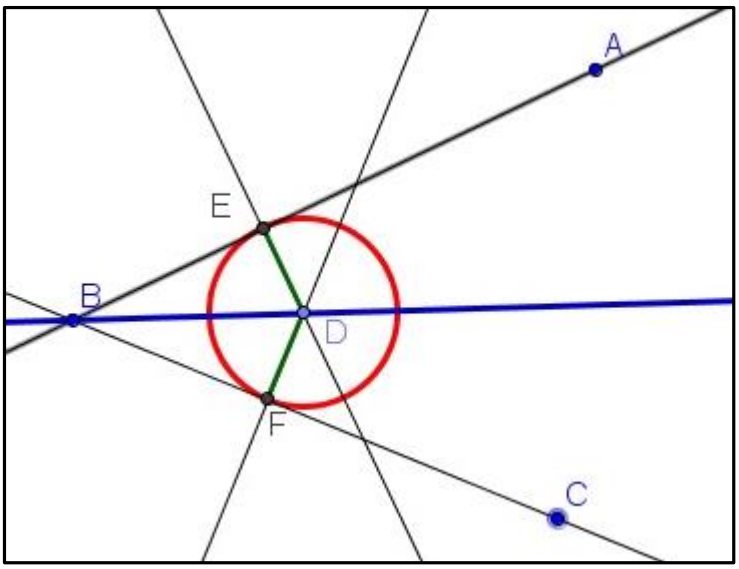


Figura 3.40. La bisectriz como lugar geométrico.

Observamos que la bisectriz genera una familia de circunferencias con centro en la bisectriz, y cada circunferencia es tangente a los lados del ángulo correspondiente. En un triángulo, las bisectrices de sus tres ángulos concurren en un punto llamado incentro o simetral, pero no es parte de la llamada recta de Euler. Lo que sí es, es el centro de un círculo que es tangente a los tres lados del triángulo, el cual se dice ser el círculo inscrito, (Ver Figura 3.41).

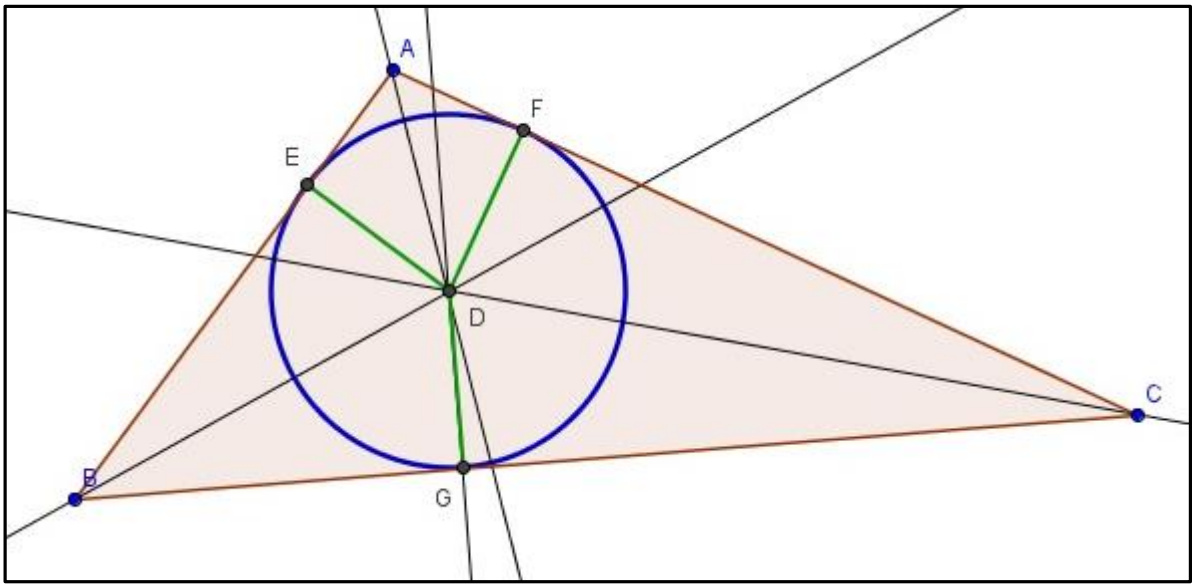


Figura 3.41. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en el incentro D, el cual es el centro de la circunferencia inscrita que tiene como tangentes a los lados del triángulo.

Si localizamos el baricentro, el circuncentro y el ortocentro de un triángulo, se puede demostrar que se encuentran alineados, es decir son colineales, y la recta que los contiene se conoce como la Recta de Euler (ver Figura 3.42).

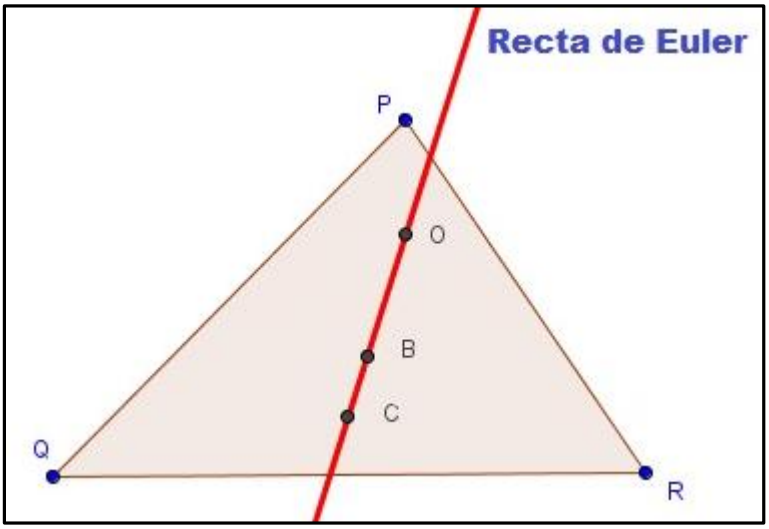


Figura 3.42. Recta de Euler. El baricentro es B, el ortocentro O y el Circuncentro C.

Además la distancia desde el baricentro a la del circuncentro es un medio de la distancia desde el baricentro hasta el ortocentro. El baricentro siempre está entre

los otros dos puntos y está más cerca del circuncentro. El baricentro siempre está en el interior del triángulo, pero el circuncentro y el ortocentro se pueden salir.

Se puede probar que los puntos O, B, C efectivamente son colineales. Para esto la herramienta digital de geogebra trae un comando que hace la operación de homotecia, dilatación, en línea recta, o inclusive si le asociamos un círculo podemos hace una dilatación circular. Una vez que se tienen O, B, C, nos ubicamos en B, y medimos su distancia a C con un círculo de radio BC, por simple exploración, (ver Figura 3.43).

Donde en realidad aplicamos la homotecia es cuando se construye con centro C y radio variable α, observando que la intersección del circulo asociado a la homotecia corta a la supuesta recta de Euler en J, y al variar α, J pasa por B y O.

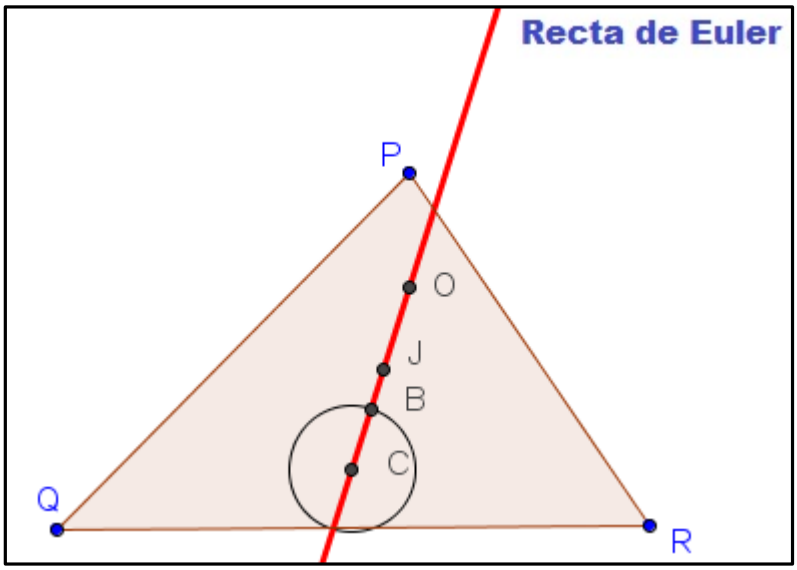


Figura 3.43. Homotecia para comprobar linealidad.

☞ Secuencia de trazos:

1. Punto A
2. Punto G
3 Segmento α. Segmento [A, G]
4. Circunferencia p. Circunferencia que pasa por B con centro C

5. Circunferencia p'. p se escala según factor α desde C
6. Punto I. Punto de intersección de p', RectaDeEuler
7. Punto J. Punto de intersección de p', RectaDeEuler.

El probar de ésta manera el resultado de la recta de Euler baja la demanda cognitiva de las transformaciones, facilitando la entrada de la visualización, que es en donde está enfocada gran parte de nuestro aparato cognitivo.

Otra aplicación de la homotecia es la de subherramienta de exploración, para poder conjeturar que la mediana queda dividida en la razón ½, con respecto a su baricentro. Es decir, si en la Figura 3.44, B es el baricentro de la mediana PE, entonces $\boldsymbol{r = \frac{EB}{BP} = \frac{1}{2} = 0.5}$.

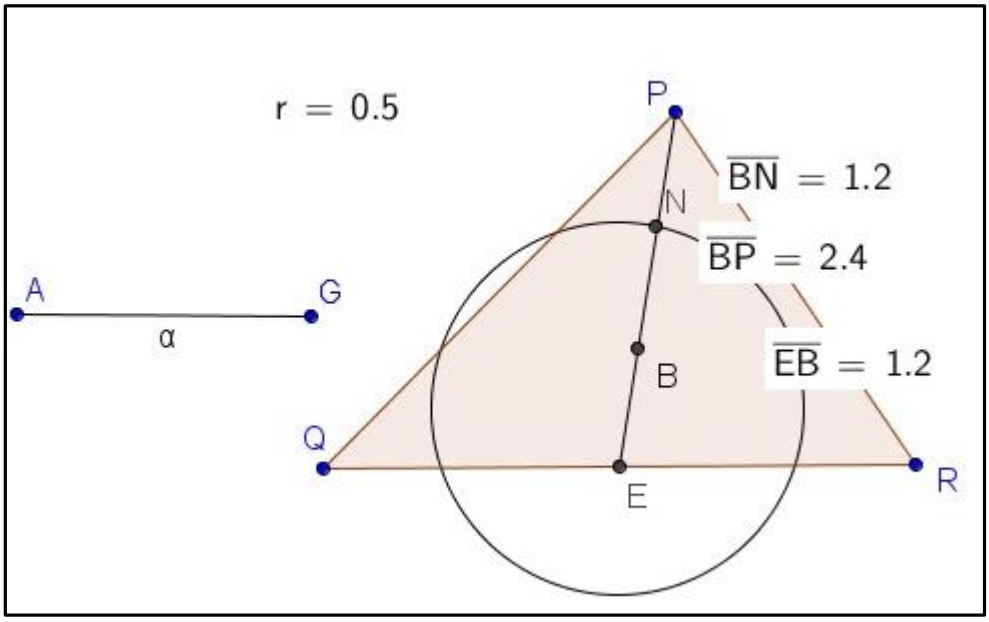


Figura 3.44. Utilizando la homotecia para comprobar la razón en la que el baricentro divide a una de sus medianas, $\boldsymbol{r = \frac{EB}{BP} = \frac{1}{2} = 0.5}$.

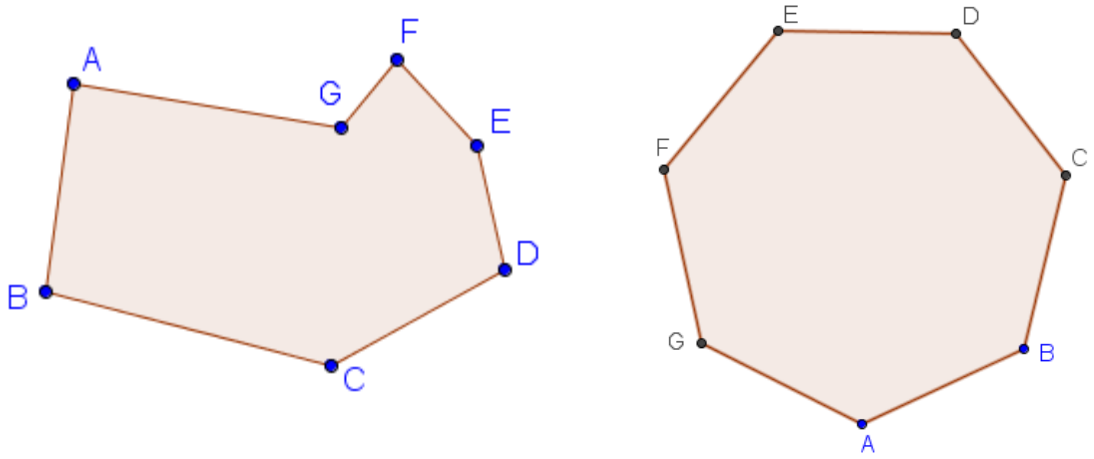
Ejercicios

1. Haz una construcción en geogebra para obtener la recta de Euler de tres triángulos diferentes.
2. para cada uno de los triángulos del problema 1, obtener su incentro.

3.11 Polígonos

Los polígonos son figuras planas cerradas, que pueden tener cualquier cantidad de lados. Un caso particular de polígono es un triángulo, que tiene tres lados. Una clasificación de los polígonos con respecto al número de lados, nos lleva a los polígono regulares, en donde todos sus lados son iguales, y a los polígonos irregulares, que son aquellos donde sus lados no son iguales.

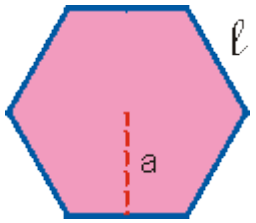
En la Figura 3.45, se tienen un polígono irregular y un polígono regular.



Polígono irregular **Polígono regular**

Figura 3.45. Un polígono irregular y un polígono regular.

El perímetro y área de un polígono regular son sencillas de calcular (Figura 3.46).



$P = n\ell$ $A = \frac{1}{2} P \cdot a$

Figura 3.46. Perímetro y área de un polígono regular.

El perímetro P es sumar la longitud de cada uno de sus lados, pero como todos los lados son iguales, y si miden l, y, si tiene *n* lados, su perímetro es $\boldsymbol{nl}$. La apotema

$\boldsymbol{a}$ de un polígono regular es la longitud del segmento perpendicular que va del centro a cualquiera de sus lados, por lo que su área es $\boldsymbol{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Pa}$, donde $\boldsymbol{P}$ es su perímetro.

El perímetro y el área para algunos polígonos irregulares, se pueden calcular con las fórmulas que se dan en la Tabla 3.1.

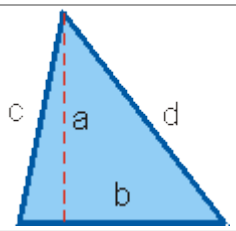
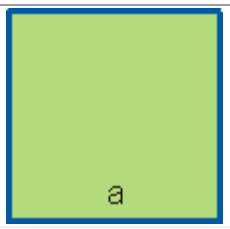
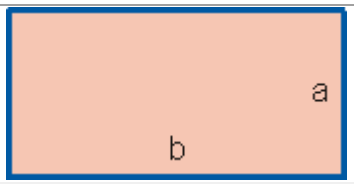
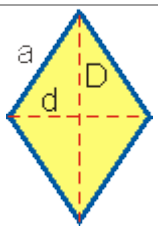
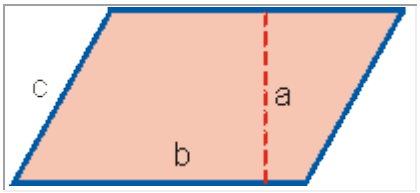
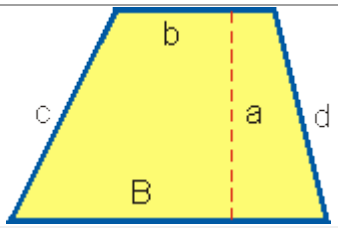
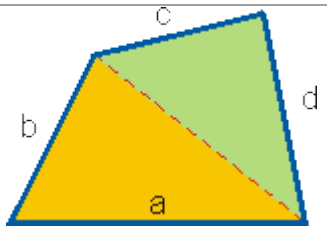
Nombre	Poligono	Perímetro	Área
Triángulo		P = Suma de los lados P = b + c + d	$A = \frac{b \cdot a}{2}$ $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ p = semiperímero
Cuadrado		P = 4 · a	$A = a^2$
Rectángulo		P = 2(b + a)	A = b · a
Rombo		P = 4 · a	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Romboide		P = 2(b + c)	A = b · a
Trapecio		P = B + c + b + d	$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$
Trapezoide		P = a + b + c + d	A = Suma de las áreas de los dos triángulos

Tabla 3.3. Perímetros y áreas de polígonos irregulares, y del cuadrado.

La ultima Figura de la Tabal 3.3, nos permite desarrollar un método para calcular el área de un polígono irregular, el perímetro seguirá siendo la suma de sus lados.

Para obtener el área de un polígono, sobre todo irregular, se puede usar el método de triangulación, donde una triangulación es una división del área en un conjunto de triángulos que cumplen las siguientes condiciones:

- La unión de todos los triángulos es igual al polígono original.
- Los vértices de los triángulos son vértices del polígono original.
- Cualquier pareja de triángulos es disjunta o comparte únicamente un vértice o un lado.

Supongamos que queremos calcular el área del polígono de la Figura 3.47.

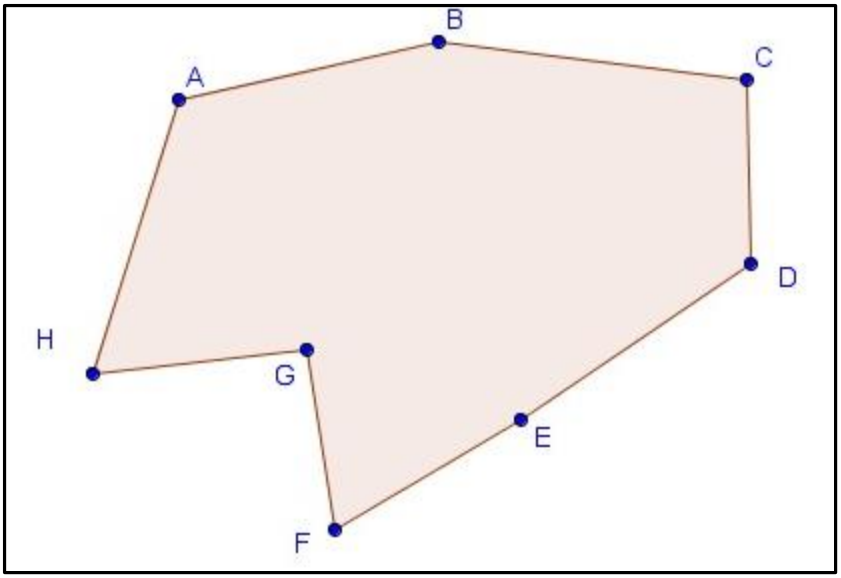


Figura 3.47. Polígono irregular al que se le quiere calcular su área.

Lo que hacemos es trazar la partición de triángulos, empezando por ejemplo con el vértice H, del cual sacamos una diagonal al vértice B, no adyacente, y que quede en el interior del polígono, luego se repite el proceso partir de B, hasta terminar, quedando la Figura 3.48, que tendrá como área la suma de las áreas de los triángulos

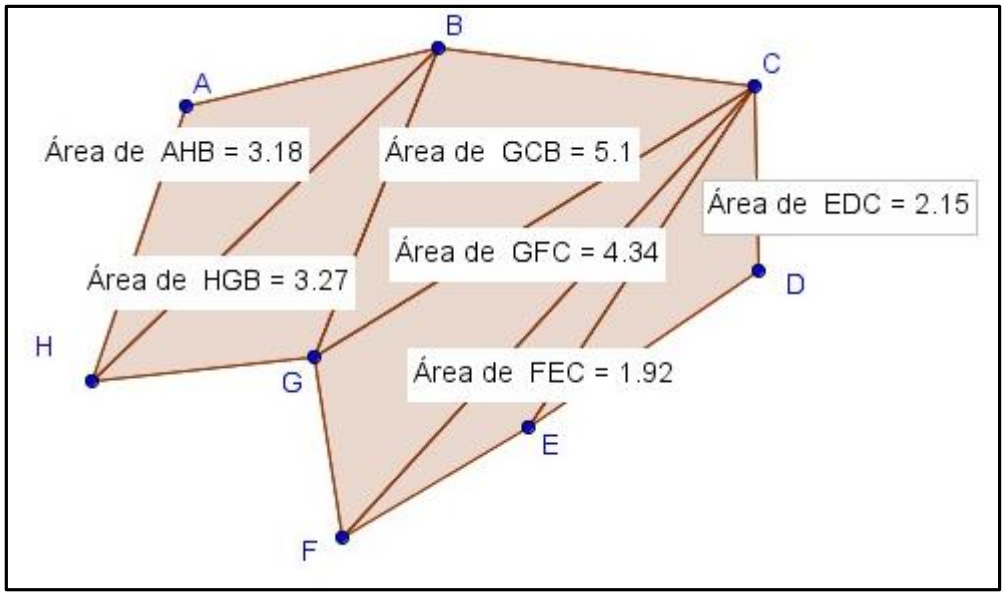


Figura 3.48. Áreas de los triángulos que forman la partición.

Área de ABCDEFGH = 3.18 + 3.27 + 5.1 + 4.34 + 1.92 + 2.15
Área de ABCDEFGH = 19.96 unidades de área.

En geogebra se pueden construir polígonos regulares e irregulares, e inclusive en el mismo software se puede calcular su área directamente, y su perímetro, se puede calcular midiendo la longitud de sus lados, con el comando “distancia o longitud” de geogebra, y sumándolos.

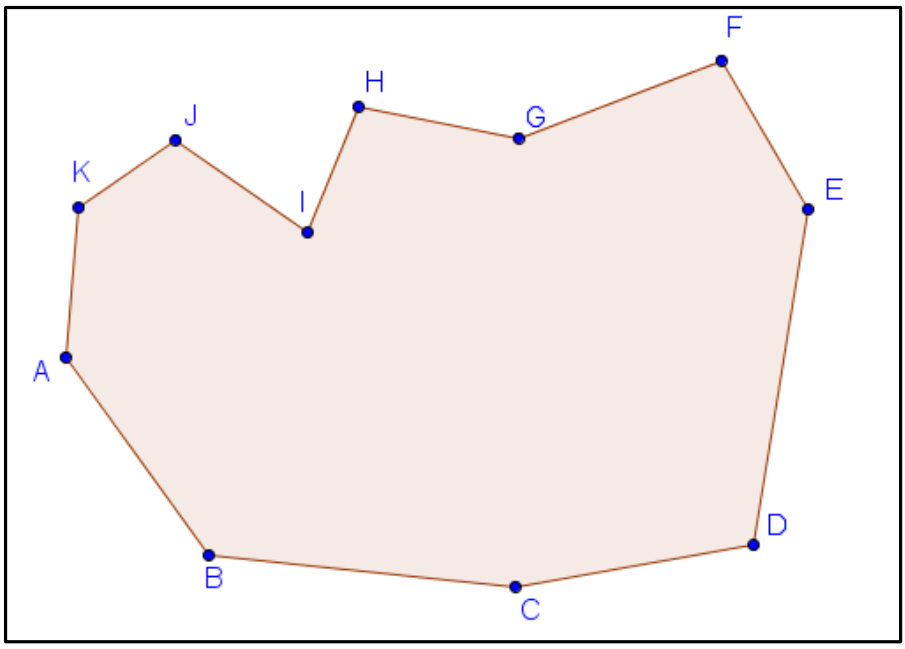
Debe observarse que se recurre el área de un triángulo, porque es una figura geométrica de la cual ya se sabe calcular su área, la cual es base por altura sobre dos.

Ejercicios

1. Como un caso especial de un polígono regular tenemos al cuadrado que tiene cuatro lados, y obviamente como $n = 4$, su perímetro es $4l$. Demuestra que utilizando la fórmula del área general de un polígono regular, se llega a que su área es1.

2. Demuestra las formulas de la Tabla 3.1.

3. Calcula por triangulación el área del polígono de la siguiente Figura:



3.12 Círculo y circunferencia

El círculo es una de las figuras fundamentales en el estudio de la geometría. Generalmente el círculo es la palabra para designar tanto a su interior como a su frontera en el plano, que es la circunferencia. A veces se utiliza la palabra circunferencia para designar la curva asociada a la frontera del círculo, pero también para indicar cuanto mide el perímetro del círculo. Un punto que está sobre la circunferencia, siempre se encuentra a una distancia constante de la circunferencia, llamada radio. En la Figura 3.49 se da un circulo con centro P y radio r, es decir, la distancia del punto Q sobre la circunferencia, al centro P es r. Nos referiremos más comúnmente a la circunferencia que al círculo en los párrafos que siguen. Se pueden resaltar segmentos y líneas notables de la circunferencia como el radio, diámetro, cuerda y tangente.

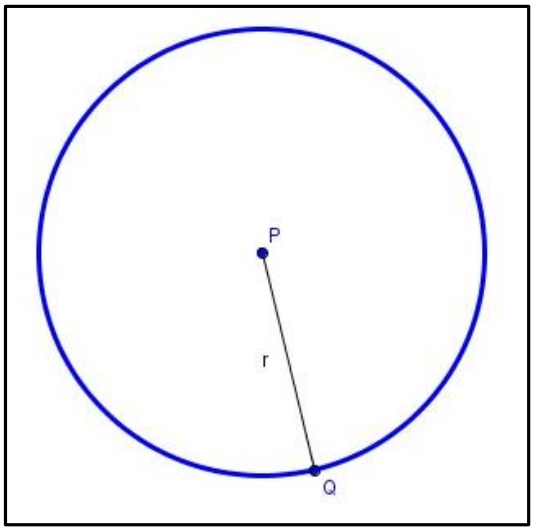


Figura 3.49. Una circunferencia con centro P y radio r.

El radio es el segmento de recta que va del centro a cualquier punto del círculo, y su longitud es constante. En la Figura 3.49, el radio es PQ, y tiene una longitud de r unidades de longitud.

El diámetro de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y además pasa por su centro.

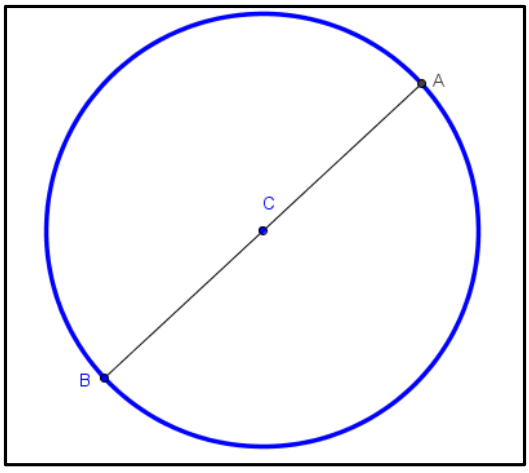


Figura 3.50. Una circunferencia con centro C y diámetro el segmento AB.

La cuerda de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia, como el segmento DE de la circunferencia de la Figura 3.51.

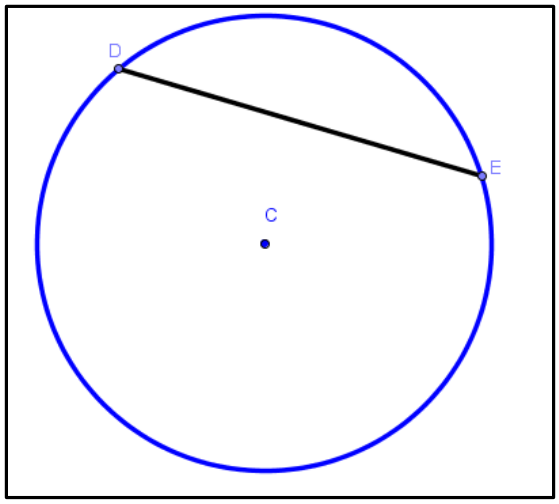


Figura 3.51. Una circunferencia con centro C y cuerda el segmento DE.

Una secante de una circunferencia corta a una circunferencia en dos puntos, como en la Figura 3.52:

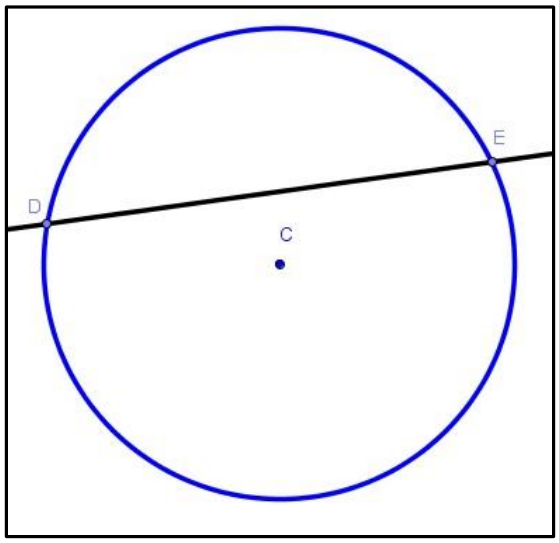


Figura 3.52. Una línea secante de una circunferencia con centro C.

La tangente de una circunferencia es una línea recta que solo corta a la circunferencia en un solo punto, como en la Figura 3.53.

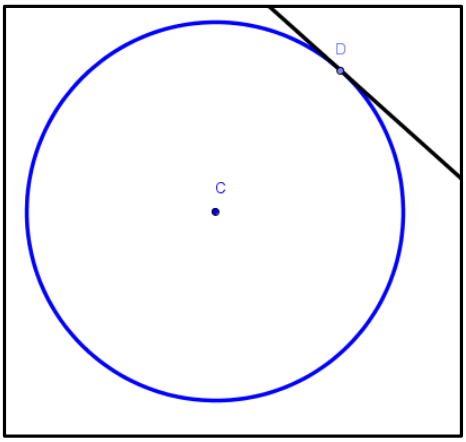


Figura 3.53. Una línea tangente en el punto D a la circunferencia con centro C.

En geogebra se pueden comprobar resultados sobre la circunferencia. Por ejemplo, el radio que se traza a un punto de tangencia es perpendicular a la tangente en ese punto. Esto se puede hacer por reducción al absurdo, pero ahora no se pretende abordar tal prueba. Es más, no hemos mencionado lo que significa probar un resultado. Lo podemos tomar como un hecho cierto. En la Figura 3.54, se tiene una tangente a una circunferencia en un punto P, y el radio, en el punto de tangencia, donde el radio y la tangente son perpendiculares.

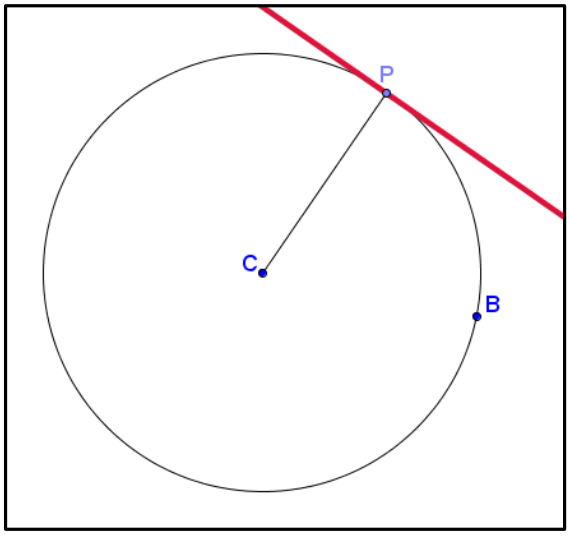


Figura 3.54. El radio CP es tangente a la circunferencia que pasa por P.

Se puede utilizar la herramienta para trazar la tangente a la circunferencia en el punto P, y mover cada uno de los puntos independientes, coloreados en azul, y comprobar visualmente que se mantiene la invariante de perpendicularidad.

Otro resultado importante es que si se tienen dos puntos de una circunferencia, la mediatriz del segmento que une a los puntos pasa por el centro de la circunferencia.

En la Figura 3.55 se tiene la mediatriz de la cuerda CD, la cual pasa por el centro de la circunferencia.

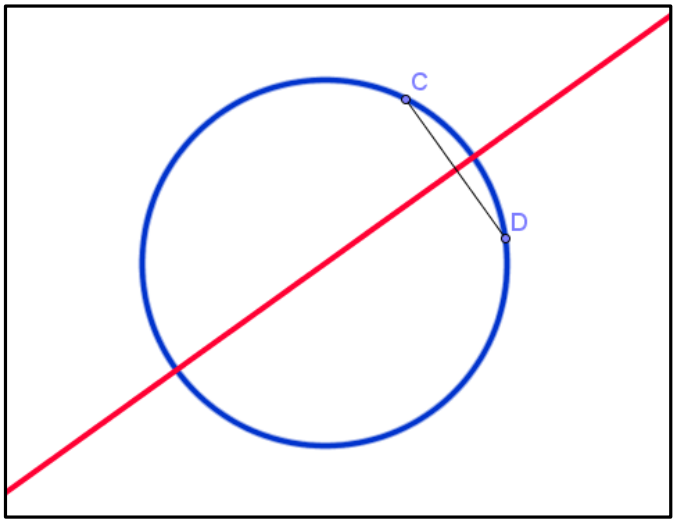


Figura 3.55. El radio CP es tangente a la circunferencia que pasa por P.

Una vez teniendo los conceptos básicos de la circunferencia se pueden hacer diversos trazos, como el de dibujar desde un punto exterior a una circunferencia una tangente, que en realidad son dos, como se muestra en la Figura 3.56.

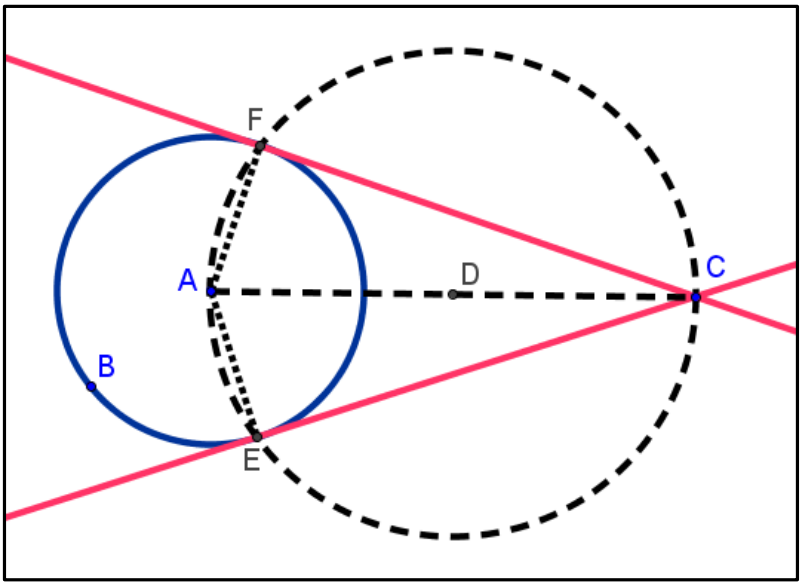


Figura 3.56. Tangentes desde el punto C a la circunferencia con radio en A, radio AB.

☞ La secuencia de trazos hechos en geogebra se puede obtener en la opción de protocolo de construcción:

1	Punto A	
2	Punto B	
3	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por B con centro A
4	Punto C	
5	Segmento a	Segmento [A, C]
6	Punto D	Punto Medio de a
7	Circunferencia d	Circunferencia que pasa por A con centro D
8	Punto E	Punto de intersección de d, c
8	Punto F	Punto de intersección de d, c
9	Recta b	Recta que pasa por F, C
10	Segmento e	Segmento [A, F]
11	Segmento f	Segmento [A, E]
12	Recta g	Recta que pasa por E, C

El ángulo central de una circunferencia tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios, como en la Figura 3.57:

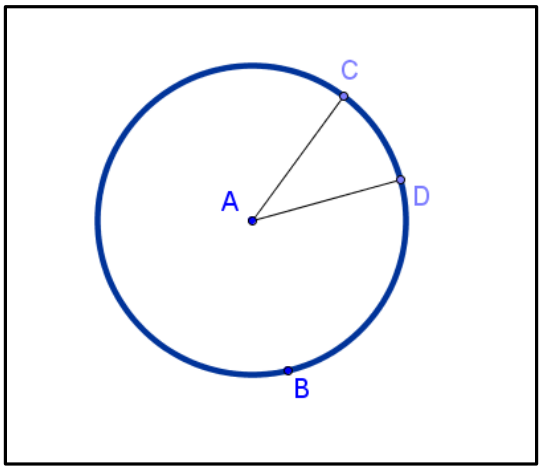


Figura 3.57. Ángulo central CAD de una circunferencia.

Un ángulo inscrito es el ángulo que tiene su vértice en una circunferencia, las semirrectas que constituyen sus lados son secantes o cuerdas de la misma.

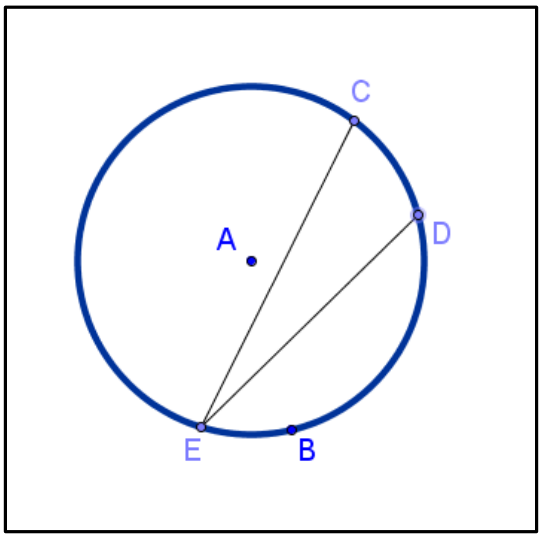


Figura 3.58. Ángulo inscrito CED de una circunferencia.

La relación entre el ángulo inscrito y el ángulo central, es que independientemente de donde esté el punto E, vértice del ángulo inscrito, el ángulo central es dos veces el ángulo inscrito, como puede apreciarse en la Figura 3.59.

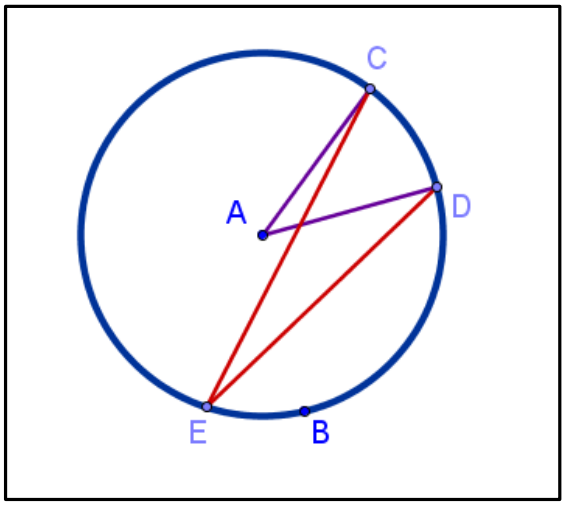


Figura 3.59. La relación entre el ángulo inscrito CED, y el ángulo central CAD es que el ángulo CAD es el doble del ángulo CED.

Ejercicios

1. Como un proyecto de trabajo, inscribir un polígono regular de n lados en una circunferencia de radio 1, obtener una aproximación al perímetro y área del círculo, tomando como aproximación al perímetro y área del círculo, el perímetro y área del polígono. Cuando n toma un valor muy grande, y compara las aproximaciones con los valores conocidos del perímetro y área de un círculo, obtenidos con las fórmulas respectivas. Puedes usar Excel para hacer las aproximaciones, pero antes debes deducir fórmulas algebraicas que te den las aproximaciones solicitadas.

2. En geogebra trazar la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados o colineales. Utilizar el hecho de que la mediatriz de una cuerda de una circunferencia pasa por su centro.

3. Utilizando geogebra mueve el vértice de un ángulo inscrito de una circunferencia, y observa que el ángulo se mantiene constante. Par verificarlo se puede utilizar la herramienta opera medir la magnitud de un ángulo.

4. Para construir un ángulo recto (Figura 3.60), se puede utilizar una circunferencia. Traza en geogebra una circunferencia con centro A y radio AB, un diámetro GF, y

toma un vértice C en cualquiera de las semicircunferencias, mueve el punto C. ¿Qué conjeturas con respecto al ángulo CGF?

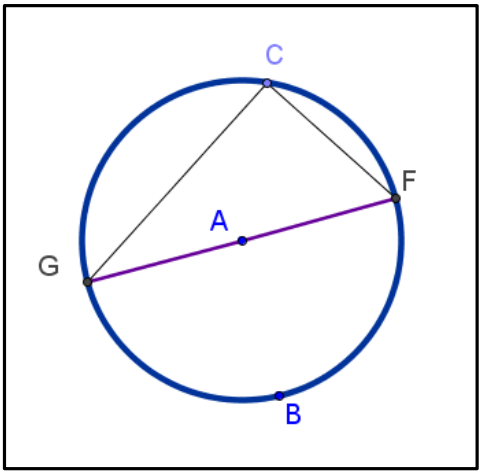


Figura 3.60.

4. ¿Cómo argumentarías que la conjetura del problema 4 es cierta?

Unidad 4. Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras

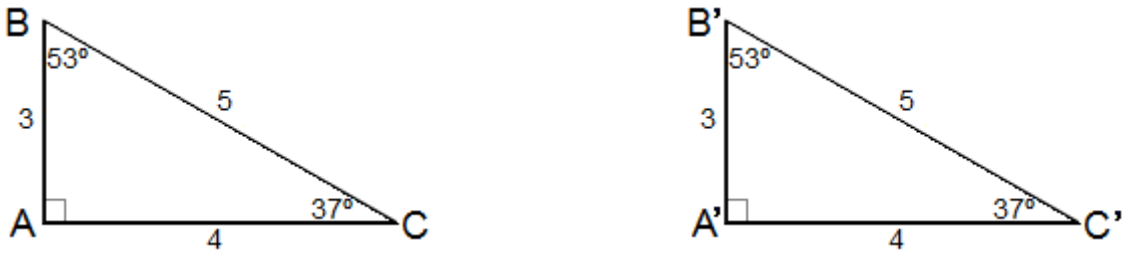
4.1 Definiciones básicas

Definición 1: Figuras congruentes

Son figuras que tienen la misma forma y tamaño; cuando se coloca una figura sobre la otra, ambas coinciden. Por ejemplo, dos círculos que tengan el mismo radio son círculos congruentes.

Definición 2: Triángulos congruentes

Son aquellos triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma (*son iguales*). Si dos triángulos son congruentes, sus lados y ángulos correspondientes son congruentes. Así los triángulos ABC y $A'B'C'$ en la Figura 4.1 tienen lados y ángulos correspondientes congruentes.



Triángulo ABC **Triángulo** $A'B'C'$

Fig. 4.1. Triángulos congruentes (iguales).

Es necesario conocer el significado de los símbolos siguientes:

Símbolo	Significado
$\cong$	Congruente
$\sim$	Semejante
A	Vértice A
A'	Vértice A-prima
a	Lado *a*
a'	Lado *a-prima*
$\overline{AB}$	Segmento AB
$\parallel$	Paralelo
$\approx$	Aproximadamente

4.2 Principios básicos de los triángulos congruentes

Principio 1: Si dos triángulos son congruentes, entonces sus partes correspondientes son congruentes. Por lo tanto, si $\boldsymbol{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$ entonces $\boldsymbol{\measuredangle A \cong \measuredangle A'}$, $\boldsymbol{\measuredangle B \cong \measuredangle B'}$, $\boldsymbol{\measuredangle C \cong \measuredangle C'}$, $\boldsymbol{a \cong a'}$, $\boldsymbol{b \cong b'}$ y $\boldsymbol{c \cong c'}$**.** (Ver Figura 4.2).

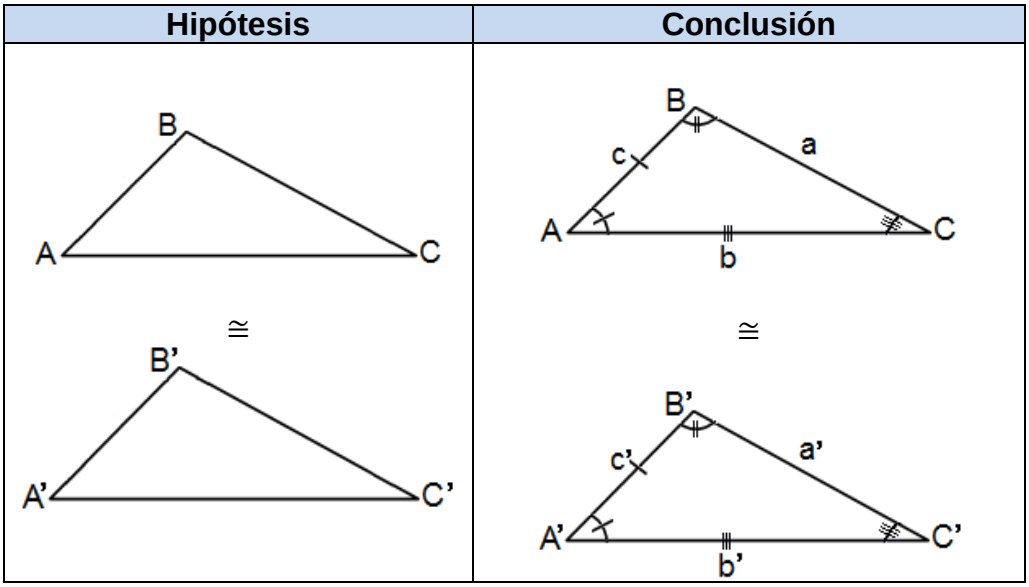


Fig. 4.2. Partes correspondientes congruentes de dos triángulos

Principio 2: (**L**ado-**Á**ngulo-**L**ado)**:** Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes con las partes correspondientes del otro, entonces los triángulos son congruentes. Si $\mathbf{b \cong b'}$**,** $\mathbf{c \cong c'}$ y $\mathbf{\measuredangle A \cong \measuredangle A'}$ entonces $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'}$**.** (Ver Figura 4.3).

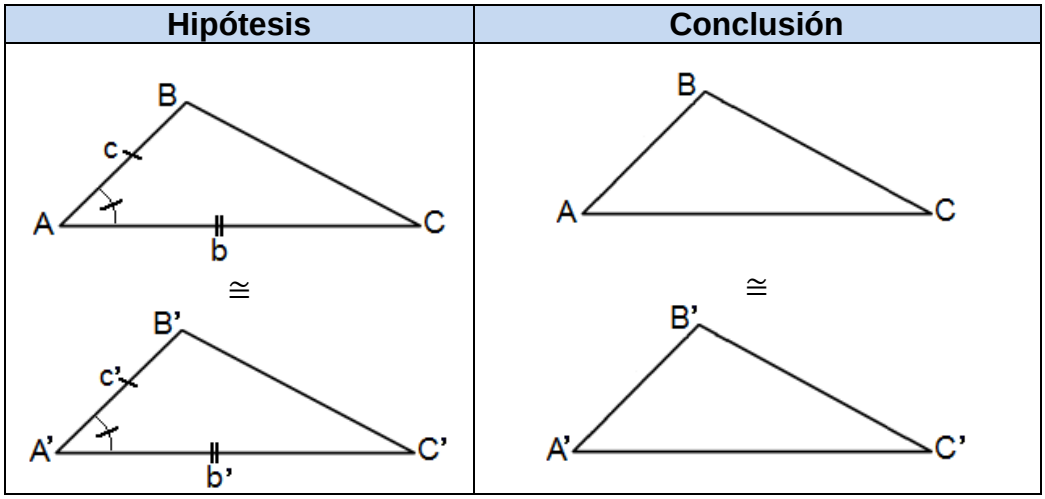


Fig. 4.3. Principio *LAL* para la congruencia de triángulos.

Principio 3: (**Á**ngulo-**L**ado-**Á**ngulo)**:** Si un lado y los dos ángulos adyacentes de un triángulo son congruentes de otro, entonces los triángulos son congruentes. Si $\measuredangle \mathbf{A} \cong \measuredangle \mathbf{A'}, \measuredangle \mathbf{C} \cong \measuredangle \mathbf{C'}$ y $\mathbf{b} \cong \mathbf{b'}$, entonces $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta A'B'C'}$. (Ver Figura 4.4).

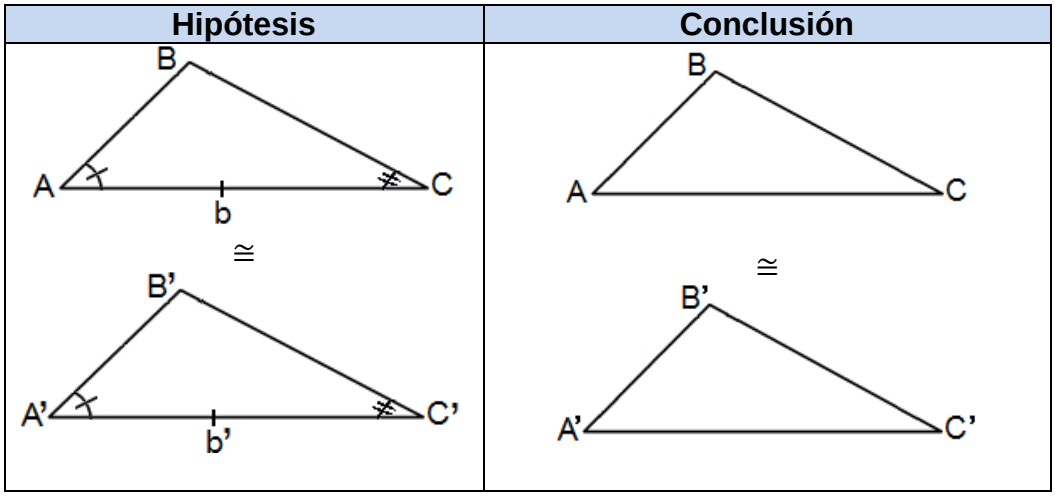


Fig. 4.4. Principio *ALA* para la congruencia de triángulos

Principio 4: (**L**ado-**L**ado-**L**ado)**:** *Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro, entonces los triángulos son congruentes*. Si $\mathbf{a} \cong \mathbf{a'}, \mathbf{b} \cong \mathbf{b'}$ y $\mathbf{c} \cong \mathbf{c'}$ entonces $\mathbf{\Delta ABC} \cong \mathbf{\Delta A'B'C'}$. (Ver Figura 4.5).

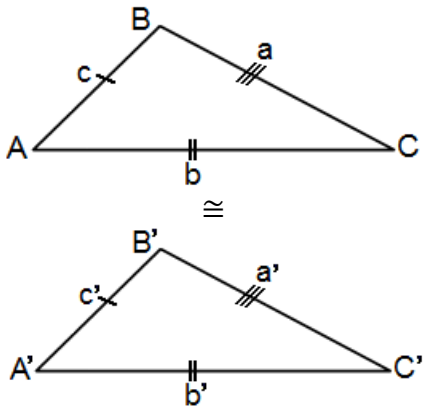
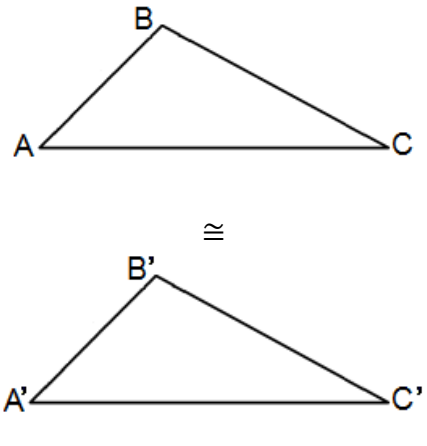
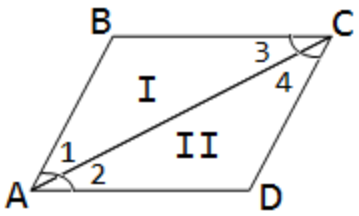
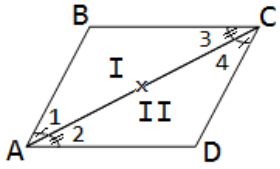
Hipótesis	Conclusión
	

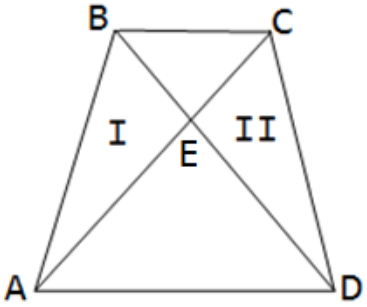
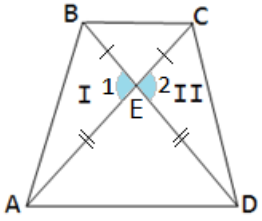
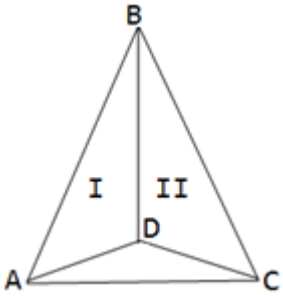
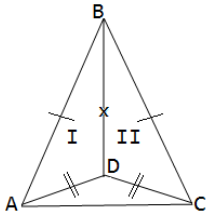
Fig. 4.5. Principio *LLL* para la congruencia de triángulos.

Los principios anteriores pueden emplearse como métodos para demostrar la congruencia de triángulos.

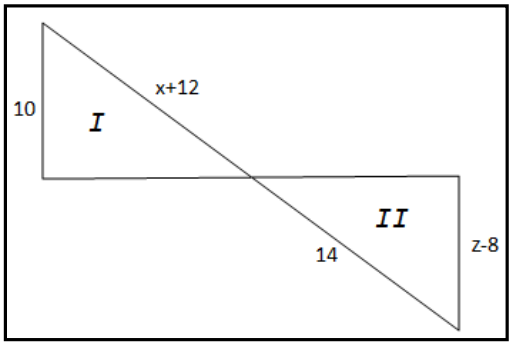
Ejercicios resueltos

1. Para cada uno de los siguientes incisos, comprueba la congruencia del Δ_I con el Δ_{II} e indica el principio de congruencia aplicado.

a) Datos: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 4$ $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 3$ 	Respuesta: $\overline{AC}$ es común en ambos triángulos. Por lo tanto, $\Delta_I \cong \Delta_{II}$ por el principio ALA. 

b) Datos: $\overline{\mathrm{BE}} \cong \overline{\mathrm{CE}}$ $\overline{\mathrm{AE}} \cong \overline{\mathrm{DE}}$ 	Respuesta: ∢1 y ∢2 son opuestos por el vértice. Por lo tanto, $\Delta I \cong \Delta II$ por el principio LAL. 
c) Datos: ΔABC es isósceles ΔADC es isósceles 	Respuesta: $\overline{\mathrm{BD}}$ es común los triángulos I y II. Por lo tanto, $\Delta I \cong \Delta II$ por el principio LLL. 

2. Para los siguientes triángulos congruentes determina el valor de las variables “x” y “z”.



Respuesta:

Como los triángulos son congruentes, los lados respectivos tienen medidas iguales, obtenemos:

x+12= 14	**z-8=10**
x=14-12	z=10-8
x=2	**z**=2

4.3 Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivos iguales y sus lados proporcionales. Si $\measuredangle \mathbf{A} \cong \measuredangle \mathbf{A}', \measuredangle \mathbf{B} \cong \measuredangle \mathbf{B}', \measuredangle \mathbf{C} \cong \measuredangle \mathbf{C}'$, $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}'} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}'}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}'}$ entonces $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'}$. (Ver Figura 4.6).

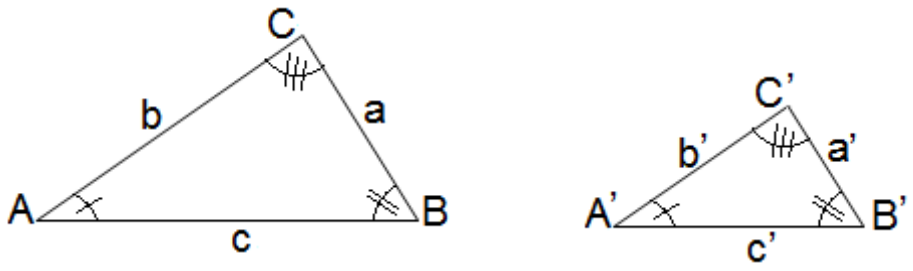


Fig. 4.6. Triángulos semejantes

Para demostrar que dos triángulos son semejantes no es necesaria la comprobación de todas estas condiciones, solamente son necesarias algunas como veremos en los siguientes criterios de semejanza.

4.4 Criterios de semejanza de triángulos

1. Criterio AA: (**Á**ngulo-**Á**ngulo): dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales. Si $\measuredangle \mathbf{A} \cong \measuredangle \mathbf{A}'$ y $\measuredangle \boldsymbol{B} \cong \measuredangle \boldsymbol{B}'$, entonces $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'}$. (Ver Figura 4.7).

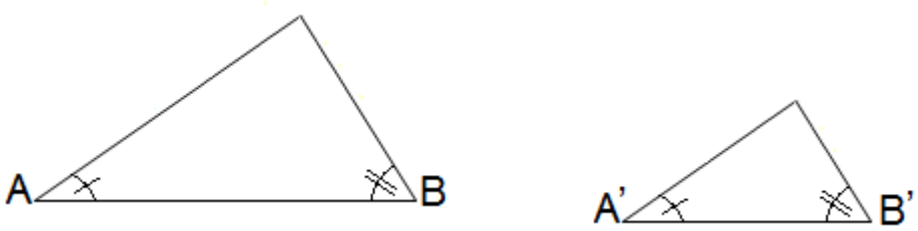


Fig. 4.7. Criterio *AA* para la semejanza de triángulos.

2. Criterio LAL: (**L**ado-**Á**ngulo-**L**ado): dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre estos lados. Si $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}'}$ $y \measuredangle \boldsymbol{C} \cong \measuredangle \boldsymbol{C}'$, entonces $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'}$. (Ver Figura 4.8).

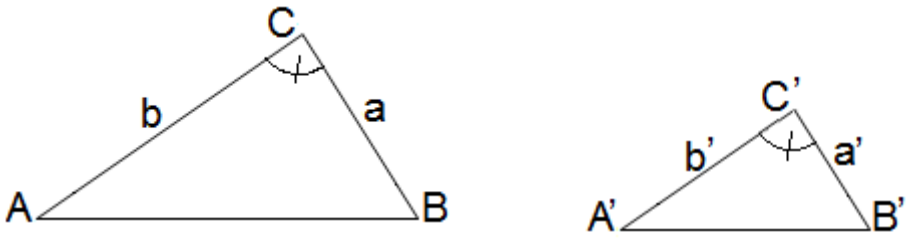


Fig. 4.8. Criterio *LAL* para la semejanza de triángulos.

3. Criterio LLL: (**L**ado-**L**ado-**L**ado): dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales. En la figura 4.9, si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'}$.

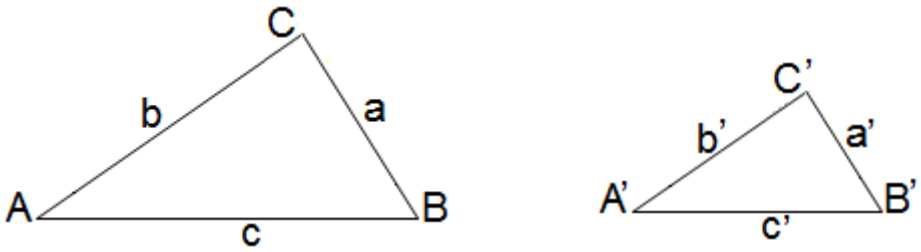


Fig. 4.8. Fig. 4.9. Criterio LLL para la semejanza de triángulos.

4.5 Teorema de Tales y su recíproco

Teorema de Tales: toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados divide a estos últimos en segmentos proporcionales.

Ejemplo:

Consideremos el $\boldsymbol{\Delta ABC}$ de la Figura 4.10, y un segmento de recta, paralelo al segmento $\boldsymbol{\overline{AB}}$, tal que interseca a los lados del triángulo en los puntos D y E. Determina si los triángulos $\boldsymbol{\Delta ABC}$ y $\boldsymbol{\Delta DEC}$, son semejantes.

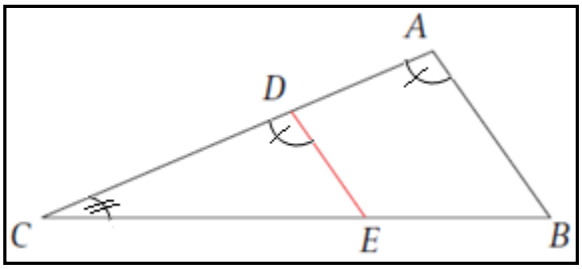


Figura 4.10.

Observemos que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, y $\overline{DE}$ es transversal a ellos, entonces: $\measuredangle CAB = \measuredangle CDE$, son ángulos correspondientes entre paralelas. Además $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$, por construcción, son el mismo ángulo. Por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta DEC$, por el criterio AA de semejanza.

Recíproco del teorema de Thales: si una recta divide dos lados de un triángulo en una misma proporción, la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

Demostración.

En el ΔABC de la Figura 4.10, sea $\overline{DE}$, el segmento que cumple la hipótesis, esto es, tal que sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, se cumple la proporción $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$.

Entonces: $\measuredangle ACB = \measuredangle DCE$, ya que, por construcción, ΔABC y ΔDEC tienen en común el ángulo con vértice en el punto C. $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$, por hipótesis y componiendo $\frac{CD+DA}{DA} = \frac{CE+EB}{EB}$. Conclusión: $\Delta ABC \sim \Delta DEC$, por el criterio LAL de semejanza.

Como consecuencia de la semejanza, los ángulos correspondientes restantes de cada triángulo son iguales. Dicho de otra forma, $\measuredangle CDE = \measuredangle CAB$ y $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$. Por lo tanto, los segmentos *DE* y *AB* son paralelos.

4.6 Teorema de la altura de un triángulo rectángulo

El Teorema de Euclides establece lo siguiente:

En el ΔABC, en el punto D localizado en el lado AB se traza la altura h_c y que pase por el vértice C, para obtener dos nuevos triángulos: ΔACD y ΔCBD (Ver Figura 4.11).

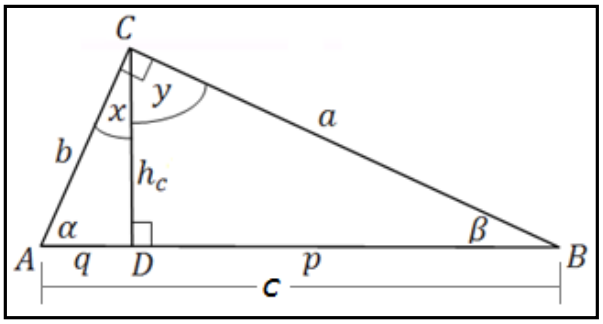


Figura 4.11.

Como el $\boldsymbol{\Delta ABC}$, rectángulo en *C*, se cumple la relación $\boldsymbol{\alpha + \beta = 90^0}$**.** Como $\boldsymbol{\overline{CD}}$ divide el ángulo recto en dos ángulos, entonces $\boldsymbol{x + y = 90^0}$**.** Además, como $\boldsymbol{\measuredangle DCA}$ es un ángulo recto, en el $\measuredangle ACD$ se tiene la relación $\boldsymbol{x + y = 90^0}$, por lo tanto $\boldsymbol{x = \beta}$.

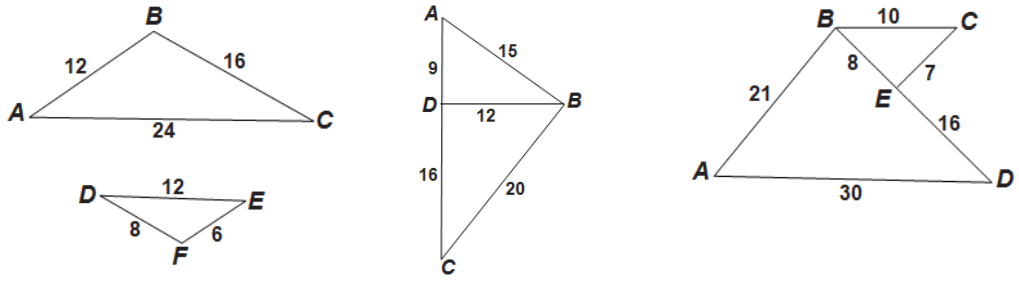
Luego, se cumple que $\boldsymbol{\Delta ABC}$**,** $\boldsymbol{\Delta ACD}$ **y** $\boldsymbol{\Delta BCD}$ tienen dos ángulos iguales: $\boldsymbol{\beta}$ y el ángulo recto, en cada caso. Por criterio AA, los tres triángulos son semejantes y sus lados correspondientes son proporcionales. Ahora, sea h_c la medida de la altura sobre la hipotenusa y *p* y *q* las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, se observa en el $\boldsymbol{\Delta ABC}$:

$\Delta ABC \sim \Delta BCD$	$\Delta ABC \sim \Delta ACD$	$\Delta ACD \sim \Delta BCD$
$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{CD}$ $\frac{c}{a} = \frac{a}{p} = \frac{b}{h_c}$ *de donde se concluye* $\boldsymbol{a^2 = c * p}$	$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CD}}$ $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{h_c}} = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{q}}$ *de donde se concluye* $\mathrm{b}^2 = \mathrm{c} * \mathrm{q}$	$\frac{AC}{CB} = \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{CD}$ $\frac{b}{a} = \frac{h_c}{p} = \frac{q}{h_c}$ *de donde se concluye* $\boldsymbol{h_c^{\,2} = p * q}$

Ejercicios resueltos

1. Para cada uno de los siguientes incisos, determina la proporción necesaria para demostrar que los triángulos son semejantes por el criterio LLL.

a) $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ b) $\Delta ABD \sim \Delta BDC$ c) $\Delta ABD \sim \Delta BEC$



Respuesta:

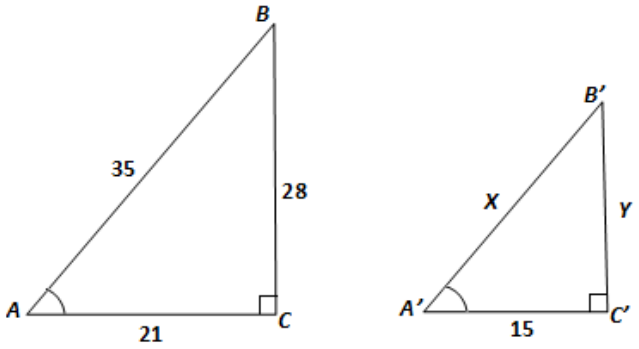
Como son triángulos semejantes, se tiene que cumplir que sus lados sean proporcionales $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces:

a) $\frac{24}{12} = \frac{16}{8} = \frac{12}{6} = 2$, por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

b) $\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = \frac{20}{15} = 1.\overline{3}$, por lo tanto $\Delta ABD \sim \Delta BDC$

c) $\frac{21}{7} = \frac{24}{8} = \frac{30}{10} = 3$, por lo tanto $\Delta ABD \sim \Delta BEC$

2. En los triángulos $\boldsymbol{\Delta ABC\ y\ \Delta A'B'C'}$, determina el criterio de semejanza y calcula el valor de "x" y "y" si $\measuredangle \boldsymbol{A} \cong \measuredangle \boldsymbol{A'}$.



Respuesta:

$\boldsymbol{\Delta ABC} \sim \boldsymbol{\Delta A'B'C'}$ por el criterio AA.

Como "*x*" y "*y*" corresponden a 35 y 28 unidades respectivamente, entonces:

$\frac{x}{35} = \frac{15}{21}$
21x=15*35
21x =525
x=525/21
x=25

$\frac{y}{28} = \frac{15}{21}$
21y=15*28
21y=420
y=420/21
y=20

4.7 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (Ver Figura 4.12).

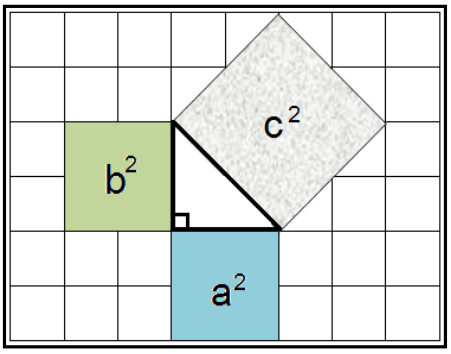


Figura 4.12.

Algebraicamente, el teorema de Pitágoras se puede representar mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

donde $\boldsymbol{a\ y\ b}$ representan la medida de cada cateto del triángulo y **c** la medida de la hipotenusa.

Conociendo las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo se puede determinar la medida del tercer lado aplicando el teorema de Pitágoras. Si **a** y **b** son catetos y **c** es la hipotenusa, entonces:

$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \boldsymbol{a = \sqrt{c^2 - b^2}} \qquad \boldsymbol{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

★ **Bibliografía:**

Unidad I. Ecuaciones Cuadráticas

1) Fleming, Walter y Varberg, Dale. Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall, México, 1991.

2) Gobran, Alfonse. Álgebra elemental. Iberoamérica, México, 1990.
Larson, Ronald y Hostetler, Robert. Álgebra. Cultural, México, 1996.

3) Miller, Charles et al. Matemática: Razonamiento y Aplicaciones. Addison Wesley Longman, México, 1999.

4) Swokowski, E., Álgebra y trigonometría con geometría analítica, 12 a. Edición. Cenagege Learning, 2009.

Unidad II. Funciones Cuadráticas y Aplicaciones

1) Smith, Stanley A., et. al., Álgebra, Fleming, Walter y Varberg, Dale. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall, México, 1991.

2) Gobran, Alfonse. Álgebra elemental. Iberoamérica, México, 1990.

3) Larson, Ronald y Hostetler, Robert, Álgebra. Cultural, México, 1996.

4) Miller, Charles et al. Mate y Geometría Analítica. Addison-Wesley Longman, México, 1998.

5) Santos, L., La función cuadrática, enfoque con resolución de problemas, ed. Trillas, México, 2001.

Unidad III. Elementos básicos de Geometría Plana

1) Itzcovich, H., iniciación al estudio didáctico de la geometría, de las construcciones a las demostraciones, zorzal, Buenos Aires, 2005.

2) Jiménez, R., Geometría y trigonometría, Pearson educación, 2007.

3) Benítez, R., Geometría plana, editorial trillas. México, 2007.

4) Rendón, Álvaro, Geometría paso a paso, Tebar, 2007.

Unidad IV. Congruencia, Semejanza y Teorema de Pitágoras

1) Galindo, J., Geometría y trigonometría, ed. Umbral, 2009.

2) Jiménez, R., Geometría y trigonometría, Pearson educación, 2007.

3) Benítez, R., Geometría plana, editorial trillas. México, 2007.

4) Rendón, Álvaro, Geometría paso a paso, Tebar, 2007.

Nota final: La presente obra va acompañada del Software dinámico e interactivo "El sueño de Descartes" para complementar los aprendizajes de los alumnos.